

Дарія Ребот¹, Маркіян-Микола Голубець², Нестор-Тарас Великий³, Ірина Верхола

¹ Кафедра систем автоматизованого проектування, Національний університет “Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, Львів, Україна, E-mail: dariya.p.rebot@lpnu.ua, ORCID 0000-0002-3583-0800

² Кафедра систем автоматизованого проектування, Національний університет “Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, Львів, Україна, E-mail: markiiian-mykola.holubets.mnknm.2023@lpnu.ua

³ Кафедра систем автоматизованого проектування, Національний університет “Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, Львів, Україна, E-mail: nestor-taras.i.velykyi@lpnu.ua

⁴ Кафедра систем автоматизованого проектування, Національний університет “Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, Львів, Україна, E-mail: iryna.i.verkhola@lpnu.ua, ORCID 0000-0001-5438-4511

ДОСЛІДЖЕННЯ ВІБРАЦІЙНИХ КОЛИВАНЬ MEMS-РЕЗОНАТОРІВ ПРИ ЇХ ЕКСПЛУАТАЦІЇ

Отримано: травень 24, 2024 / Переглянуто: червень 14, 2024 / Прийнято: серпень 16, 2024

© Ребот Д., Голубець М., Великий Н-Т., Верхола І., 2024

<https://doi.org/>

Анотація. Побудовано математичну модель дослідження амплітудо-частотних характеристик балки резонатора. Для побудови використано методи нелінійної механіки. В отриманій математичній моделі враховано вплив зміни пружних характеристик матеріалу балки резонатора на її амплітуду та частоту коливань. Для визначення внутрішніх процесів, що відбуваються в матеріалі балки використано закони Фойгта та Болотіна. На основі математичного моделювання встановлено, що зростання пружної складової матеріалу балки резонатора призводить до зростання амплітуди коливань балки та спадання її частоти коливань.

Ключові слова: математична модель, коливання, вібрація, хвилі, пружні властивості, MEMS, нелінійна механіка

Вступ та постановка задачі

Сучасний розвиток технологій потребує прискорення досліджень у сфері MEMS. Такі дослідження скеровані на підвищення точності та ефективності роботи датчиків, а також на удосконалення їх конструкції та технології виробництва. До основних MEMS-датчиків відносять акселерометри, кантелівери, гіроскопи, а також резонатори.

У найближчій перспективі очікується, що MEMS-резонатори поступово замінять кварцові елементи. Основними перевагами резонаторів є малі габарити, низька собівартість виготовлення, стійкість проти механічних ударів, здатність функціонувати у широкому діапазоні температур та незалежність їх розміру від внутрішньої частоти.

Огляд сучасних джерел інформації за тематикою публікації

В літературних джерелах виділяємо наступні напрями досліджень, пов'язані із підвищенням ефективності роботи та удосконаленням конструкції MEMS-резонаторів. У роботах [1-4] розглянуто вплив нелінійних коливальних характеристик на ефективність роботи резонатора використовуючи підходи, які базуються на математичному моделюванні цього процесу. Зокрема, розглянуто спрощені одновимірні та двовимірні моделі резонаторів. Використовуючи такі моделі проаналізовано коливальні режими резонатора.

Важливою складовою резонатора є його віброюча частина, яку виготовлено у вигляді мікробалки. Таку мікробалку у літературі ще прийнято називати мікроконсоллю або мікромостом. В публікації [5]. проведено дослідження динамічної поведінки MEMS-консолі для різних режимів

коливань. Результати дослідження використано для визначення резонансної частоти, амплітуди та швидкості таких коливань в умовах навколишнього середовища та у вакуумі. Досліджено процес термопружного демпфування в балці. В роботі [6] описано як впливають зовнішні умови на амплітудно-частотні характеристики мікроконсоли. В режимі Ламе [8] робоча частина MEMS-резонатора розглядалась, як квадратна пластина, в якій при виникненні вібрації одні паралельні сторони розширюються, а інші стискаються. Під час моделювання резонатора віброюча частина розглядалась як тонка балка, товщина якої була значно менша від довжини.

У перелічених вище дослідженнях коливальні режими роботи резонатора розглядалися на основі електростатичного впливу, що не дає змоги повністю описати його роботу з точки зору механіки. Це важливо, тому що MEMS-резонатори приводяться в дію електричним приводом, який надає імпульси, приводить балку резонатора в безперервні коливання та підтримує рух з відповідними амплітудою та частотою. Тобто, динамічні процеси балки резонатора впливають на ефективність та коректність його роботи. Також розглянуті лише окремі моделі робочих частин MEMS-резонаторів, що дає можливість розглянути коливальні процеси лише в окремих випадках.

У даній статті пропонується побудувати математичну модель нелінійних коливань балки резонатора для визначення її амплітудно-частотної характеристики в залежності від впливу зовнішніх факторів та пружних характеристик балки. Таку модель пропонується розробити на основі методів нелінійної механіки. Це дозволить коригувати частоту коливань балки з метою оптимізації роботи резонатора.

Виклад основного матеріалу

Для побудови математичної моделі для опису коливань MEMS-резонатора приймаємо наступні припущення. Нехай віброюча балка резонатора закріплена пружно або жорстко. Також кріплення та структура резонатора може відрізнитись в залежності від застосування [8-10]. Розглянемо одинарно або подвійно закріплену балку (Fig. 1). Це дасть змогу дослідити різні випадки зовнішнього впливу на її коливання.

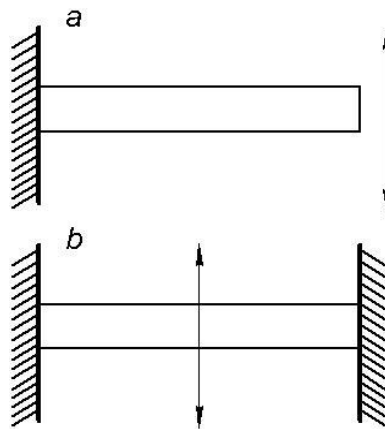


Рис. 1. Схеми закріплення віброючої частини (балки) резонатора: а) мікроконсоль; б) мікроміст

Вважаємо, що матеріал балки резонатора є анізотропним [11-13]. Це забезпечує пластично-пружні властивості балки, а її висотою (товщиною) можна знехтувати порівняно із її довжиною.

Виділимо два види коливань балки резонатора. В першому випадку відбувається коливання пристрою по осі ξ паралельно до підкладки пристрою. В другому випадку по осі z перпендикулярно до підкладки пристрою.

Розглянемо перший випадок. Нелінійні та періодичні сили призводять до зміни динамічного процесу балки резонатора. Тобто, в даному випадку амплітуда та частота її коливань є змінними величинами. При чому, остання суттєвим чином залежить від співвідношення між частотами

власних та вимушених коливань. Тому варто розглянути резонансний та нерезонансний випадки коливань.

В закріпленій балці резонатора при виникненні зовнішніх електромагнітних збурень відбуватиметься деформація та напруження, так як вона має пружно-пластичні параметри. Співвідношення між останніми можна записати на основі закону нелінійності Фойгта. Але нелінійною тут може бути лише одна складова – в'язка або пружна. Тому в даній задачі необхідно відобразити ці два варіанти.

Маємо нелінійний вид в'язкої складової напруження:

$$\sigma = E\zeta + k_0 \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^{\nu+1}. \quad (1)$$

Маємо нелінійний вид пружної складової напруження в законі Фойгта

$$\sigma = E\zeta^{\nu+1} + k_0 \left(\frac{d\zeta}{dt} \right). \quad (2)$$

В формулах (1), (2) значення σ описує нормальне напруження в досліджуваній балці (в плоскому поперечному перерізі балки); E , k_0 , ν є параметрами, які відображають пружно-в'язкі характеристики матеріалу шару балки; $\zeta = \frac{\partial u}{\partial \xi}$ – деформація поперечного перерізу досліджуваної балки ($u = u(\xi, t)$ – закон руху по осі ξ певної її точки за час t).

Пружно-пластичні характеристики матеріалу балки по різному впливають на динамічний процес і можуть як підвищувати, так і понижувати його ефективність. Також в розглядуваній балці виникатиме сила, що описуватиме внутрішнє тертя R окремими шарами балки. Тому згідно закону Болотіна:

$$R = \frac{\partial u}{\partial t} (B + B_0 u^2). \quad (3)$$

У формулі (3) складові B, B_0 є певними константами, що визначаються залежно від матеріалу шару балки.

В представленій моделі було введено певні гіпотези, про матеріал шару балки. Для багатьох матеріалів співвідношення, які описують інтегральні пружні властивості мають яскраво виражений нелінійний характер. Тому матимемо два закони руху поперечного перерізу шару балки по осі ξ .

Нелінійний вид в'язкої складової напруження:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \beta \left(\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^2 \partial t} \right)^{\nu+1} = f(t) + \frac{\partial u}{\partial t} (g + \delta u^2). \quad (4)$$

Нелінійний вид пружної складової напруження в законі Фойгта:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^{\nu+1} - \beta \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^2 \partial t} = f(t) + \frac{\partial u}{\partial t} (g + \delta u^2). \quad (5)$$

У формулі (5) символами α , β , g , δ позначено параметри, що відобразатимуть тип матеріалу шару балки, $f(t)$ позначає силу впливу зовнішнього середовища на балку.

Припускаємо також, що у законах наведених вище, в'язке тертя є дуже мізерним відносно нелінійних сил, яке забезпечує відновлення форми балки при русі ($\beta, g, \delta \ll \alpha^2$).

Дослідження вібраційних коливань MEMS-резонаторів при їх експлуатації

Перенесемо по одному доданку з лівої частини рівняння у праву, та запишемо величину сили збурення. В результаті матимемо першу модель опису динаміки точки поверхні балки, що має нелінійний вид в'язкої складової напруження:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \varepsilon \left[\left(\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^2 \partial t} \right)^{\nu+1} + (\mathcal{G}_1 + \delta_1 u^2) \frac{\partial u}{\partial t} + b_1 \sin \mu t \right]. \quad (6)$$

У формулі (6) εb_1 та μ є константами, що показують взаємодію поверхні балки із зовнішнім середовищем.

Нехай умови взаємодії шару балки та поверхні її закріплення жорсткі ($u(0,t) = u(l,t) = 0$), тобто, балка розміщена фіксовано. Відповідно розв'язок рівняння (6) матиме вигляд:

$$u_k(\xi, t) = a(t) \tilde{\Xi}_k(\xi) \cos(\omega_k^* t + \theta(t)). \quad (7)$$

В рівнянні (7) $\omega_k^* = \alpha \frac{k\pi}{l}$ (l - довжина балки, в робочому органі оброблювальної системи), $k = 1, 2, \dots$

З рівняння (7) необхідно знайти амплітуду коливань $a(t)$ та фазу коливань $\theta(t)$. Їх величину і закони зміни визначимо наближено з 1-ї форми коливань, коли зовнішня сила збурень не діє:

$$\begin{cases} \dot{a} = \frac{\varepsilon}{\omega^* p} \int_0^l \int_0^l \left(\left(\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^2 \partial t} \right)^{\nu+1} + (\mathcal{G}_1 + \delta_1 u^2) \frac{\partial u}{\partial t} + b_1 \sin \mu t \right) \times \sin \frac{\pi \xi}{l} \sin \psi d\xi d\psi; \\ \dot{\theta} = \frac{\varepsilon}{\omega^* ap} \int_0^l \int_0^l \left(\left(\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^2 \partial t} \right)^{\nu+1} + (\mathcal{G}_1 + \delta_1 u^2) \frac{\partial u}{\partial t} + b_1 \sin \mu t \right) \times \sin \frac{\pi \xi}{l} \cos \psi d\xi d\psi, \end{cases} \quad (8)$$

У системі рівнянь (8) $p = \int_0^l \tilde{\Xi}^2(\xi) d\xi$, $\psi = \omega^* t + \theta(t)$.

При розгляді впливу вібрацій та закінченні всіх перехідних процесів балка має встановлений вид коливного руху. В такому випадку рівняння (8) має вигляд $a_2 = \sqrt{\frac{16\varepsilon}{3\delta_1} \left(\frac{\pi^2}{l^2} - \mathcal{G}_1 \right)}$. Як бачимо, амплітуда досліджуваної точки балки є стала, модель майже лінійна ($\nu = 0$).

Тому можна зробити наступні висновки:

1) незважаючи на первинні параметри процесу зовнішнього сталого впливу на балку резонатора, амплітуда її коливного руху в процесі тривалої роботи приймає певне стає значення. Матимемо стійкий встановлений процес коливань;

2) сама величина амплітуди оцих усталених коливань буде визначитись в залежності від фізичних та механічних характеристик балки, зовнішнього змінного впливу на неї.

Тепер розглянемо резонансний випадок у системі. Відомо, що амплітудо-частотні характеристики нелінійних коливань системи визначаються фазою впливу збурювача. Тому запровадимо в рівнянні (8) різницю фаз $\varphi = \psi - \gamma$, $\gamma = \mu t$. Коли матимемо головний резонанс, частота

коливань внутрішня балки співпадатиме з частотою коливань зовнішнього збурювача $\omega^* \approx \mu$. Отож матимемо:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \varepsilon \left[\frac{v \cdot a}{2} \left(\frac{\pi^2}{l^2} - \vartheta_1 - \frac{3a^2 \delta_1}{16} \right) + \frac{2b_1 \cos \varphi}{\pi \omega^*} \right]; \\ \frac{d\varphi}{dt} = \omega^* - \mu - \frac{2\varepsilon b_1 \sin \varphi}{\pi \omega^* a}. \end{cases} \quad (9)$$

Розв'язок будуватимемо асимптотичний. Обмежимося першим наближенням. Тому для резонансу матимемо:

$$u(\xi, t) = a(t) \sin \frac{\pi \xi}{l} \cos(\varphi + \mu t). \quad (10)$$

В рівнянні (10) $a(t)$ та $\varphi(t)$ необхідно визначити з системи нелінійних диференціальних рівнянь (9).

Результати та обговорення

Амплітуда коливного руху балки резонатора під час можливого резонансу визначається своєю питомою вагою та амплітудою коливань. Якщо подолати головний резонанс $\omega = \mu$ за мінімально можливий проміжок часу, то він не буде суттєво змінюватись при зміні амплітуди коливань балки (зростання в межах 5%). Дана величина буде прямувати до певного усталеного значення, яке залежатиме від самих характеристик балки та параметрів роботи коливної системи. Визначити величину амплітуди можна шляхом числової інтеграції виразу (9).

Також на основі попереднього моделювання розглянемо варіант взаємодії балки з досліджуваною поверхнею (контактна робота кантилівера), а саме нелінійно-пружна взаємодія:

$$\begin{cases} \left[\alpha_1 v \frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta_1 u \right]_{\xi=0} = \varepsilon \varphi_1(\xi, t)|_{\xi=0}; \\ \left[\alpha_2 v \frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta_2 u \right]_{\xi=l} = \varepsilon \varphi_2(\xi, t)|_{\xi=l}, \end{cases} \quad (11)$$

У формулі (11) $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in [0,1]$ є константами; $\varphi_1(\xi, t) = h_1 u + d_1 u^3 - b_1 \sin \mu t$, $\varphi_2(\xi, t) = -\varphi_1(\xi, t)$, h_1, d_1, h_2, d_2 є параметрами нелінійно-пружної взаємодії балки та досліджуваної поверхні.

Коли маємо усталений режим роботи, тоді зміст має наступний вираз:

$$u(\xi, t) = a_2 \Xi(\xi) \cos(\alpha \lambda_1 + \mu t). \quad (12)$$

В рівнянні (12): $a_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon v P_2}{2 \alpha \lambda_1 \pi P_1 P_3}}$, $\Xi(\xi) = \sin \lambda_1 \xi - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \lambda_1 \cos \lambda_1 \xi$, $P_3 = \delta_1 (\alpha \lambda_1 + \mu) \frac{\pi}{l} \int_0^l \Xi^4(\xi) d\xi$, $P_2 = \pi (\alpha \lambda_1 + \mu) \left[\int_0^l \Xi(\xi) \Xi''(\xi) d\xi + \vartheta_1 P_1 \right]$, $P_1 = \int_0^l \Xi^2(\xi) d\xi$.

λ_1 - власна величина за даних умов контакту, що відповідає виразам (6), (10) за умови, що права їх частина буде прирівнюватись 0.

Отже задовольняючи умовам резонансу будуюмо асимптотичний розв'язок (6) у вигляді ряду, перший член якого матиме вигляд:

$$u(\xi, t) = \left(\sin \lambda_1 \xi - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \lambda_1 \cos \lambda_1 \xi \right) \times a(t) \cos(\varphi(t) + \mu t). \quad (13)$$

Невідомі вирази $a(t)$ та $\varphi(t)$ можна знайти за допомогою системи диференціальних

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon v}{2\alpha\lambda_1\pi P_1} (P_2 a + P_3 a^3 + \pi(b_2 - \mu^2 b_1 P_5) \cos \varphi), \\ \frac{d\varphi}{dt} = \alpha\lambda_1 - \mu + \frac{\varepsilon v}{2\alpha\lambda_1\pi P_1} \left(P_4 a^2 + \pi(\mu^2 b_1 P_5 - b_2) \frac{\sin \varphi}{a} \right), \end{cases} \quad (14)$$

відповідно P_4, P_5 будуть певними константами, які можна отримати за допомогою α_i, β_i , де $i = 1, 2$.

На основі отриманої математичної моделі побудуємо графічну залежність зміни амплітуди та частоти коливань балки резонатора від пружних властивостей її матеріалу.

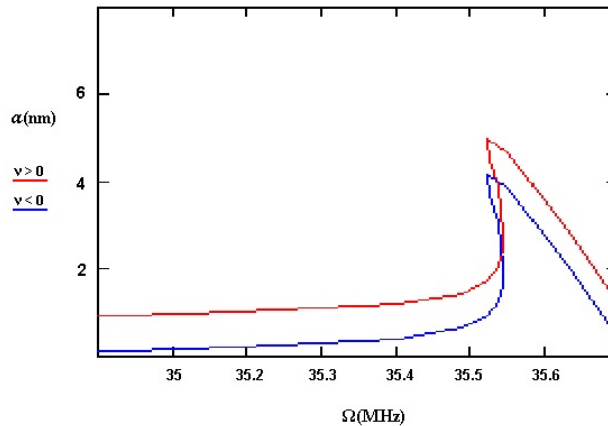


Рис. 2. Графік зміни амплітуди та частоти коливань балки резонатора в залежності від пружних властивостей її матеріалу.

Графік (Рис. 2) показує, що жорсткі властивості матеріалу балки резонатора приводять до зростання його амплітуди та частоти коливань, а отже до підвищення інтенсивності динамічного процесу.

Висновки

Резюмуючи отримані результати досліджень, можна акцентувати увагу на тому, що побудовано одну з моделей опису динаміки балки резонатора, яка є досить універсальною, та дає змогу дослідити залежності амплітудо-частотних характеристик резонатора та скоригувати їх необхідні показники.

Побудована математична модель вказує на те, що коливальний процес в балці резонатора проходить по складному закону, який одночасно враховує вплив зовнішніх сил та пружних властивостей балки резонатора. Що стосується жорстких матеріалів балки – то коливальний процес в даному випадку буде інтенсивніший за більших значень амплітуди коливань

Перелік використаних джерел

- [1] Q. Shin, A. Qiu, Y. Su and R. Shi, "Nonlinear oscillation characteristics of MEMS resonator", 2010 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation, 2010, pp. 1250–1253, <https://doi.org/10.1109/ICMA.2010.5589936>.
- [2] Daniel Platz, Ulrich Schmid "Vibrational modes in MEMS resonators" Journal of Micromechanics and Microengineering, vol. 29 No 12, 3001, <https://doi.org/10.1088/1361-6439/ab4bad>
- [3] C. Comi, A. Corigliano, G. Langfelder, A. Longoni and A. Tocchio, "On the nonlinear behaviour of MEMS resonators," 2011 12th Intl. Conf. on Thermal, Mechanical & Multi-Physics Simulation and Experiments in Microelectronics and Microsystems, 2011, pp. 1/6–6/6, <https://doi.org/10.1109/ESIME.2011.5765821>
- [4] David A. Czaplewski, Daniel López, Oriel Shoshani Steven W. Shaw "Nonlinear mode coupling in a MEMS resonator", Proc. SPIE 11324, Novel Patterning Technologies for Semiconductors, MEMS/NEMS and MOEMS 2020, 1132414 (23 March 2020), <https://doi.org/10.1117/12.2551883>
- [5] Pustan, Marius, Birleanu, C., Rusu, F., Haragăș, S "Dynamic Behavior of MEMS Resonators." Applied Mechanics and Materials, Trans Tech Publications, Ltd., 2014, vol. 658 pp. 694–699.

<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amm.658.694>

[6] Rocha, R.T., Alfossail, F., Zhao, W., Younis, M.I., Masri, S.F. “Nonparametric Identification of a Nonlinear MEMS Resonator”, *Advances in Nonlinear Dynamics. NODYCON Conference Proceedings Series*. Springer, Cham. 2022, pp. 405–415, https://doi.org/10.1007/978-3-030-81166-2_36

[7] Lee, J. E.Y. “Lamé Mode MEMS Resonators”, *Encyclopedia of Nanotechnology*, Springer, Dordrecht. 2016, pp. 1731–1739 https://doi.org/10.1007/978-94-017-9780-1_101001 A. Tocchio, C. Comi, G. Langfelder, A. Corigliano and A. Longoni, “Enhancing the Linear Range of MEMS Resonators for Sensing Applications”, in *IEEE Sensors Journal*, vol. 11, no. 12, pp. 3202–3210, Dec. 2011, <https://doi.org/10.1109/JSEN.2011.2158997>

[8] Saadon Salem, Wahab Yufridin. “Review on Vibration-Based MEMS Piezoelectronic Energy Harvesters”, *Journal of Science and Engineering*, 2015, vol. 72 Iss. 1, pp 1–6, <https://doi.org/10.13140/RG.2.1.2796.3604>.

[9] J. J. M. Zaal, W. D. van Driel, S. Bendida, Q. Li, J. T. M. van Beek, G. Q. Zhang, “Packaging influences on the reliability of MEMS resonators”, *Microelectronics Reliability*, 2008, vol. 48, Iss. 8–9, pp. 1567–1571, <https://doi.org/10.1016/j.microrel.2008.06.041>

[10] R. Mestrom, R. Fey, J. van Beek, K. Phan, H. Nijmeijer “Nonlinear oscillations in MEMS resonators” *ResearchGate*, 2006, <https://www.researchgate.net/publication/255599539>

[11] Huzyk, N.; Pukach, P.Y.; Sokil, B.; Sokil, M.; Vovk, M. “On the external and internal resonance phenomena of the elastic bodies with the complex oscillations”, *Mathematical Modeling and Computing*, 2022, vol. 9, No. 1, pp. 152–158, <https://doi.org/10.23939/mmc2022.01.152>

[12] Topilnytskyy, Volodymyr, et al. "Modeling the Dynamics of Vibratory Separator of the Drum Type with Concentric Arrangement of Sieves." *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, vol. 2, no. 7, 2017, pp. 26–35, <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.95615>

[13] Andrukhiv, A.; Sokil, M.; Sokil, B.; Fedushko, S.; Syerov, Y.; Karovic, V., Jr.; Klynina, T. Influence of Impulse Disturbances on Oscillations of Nonlinearly Elastic Bodies. *Mathematics*, 2021, 9, 819. <https://doi.org/10.3390/math9080819>

Dariia Rebot¹, Markiiian-Mykola Holubets², Nestor-Taras Velykyi³, Iryna Verkhola⁴

¹ Computer Design Systems Department, Lviv Polytechnic National University, S. Bandery st. 12, Lviv, Ukraine, E-mail: dariya.p.rebot@lpnu.ua, ORCID 0000-0002-3583-0800

² Computer Design Systems Department, Lviv Polytechnic National University, S. Bandery st. 12, Lviv, Ukraine, E-mail: markiiian-mykola.holubets.mnknm.2023@lpnu.ua

³ Computer Design Systems Department, Lviv Polytechnic National University, S. Bandery st. 12, Lviv, Ukraine, E-mail: nestor-taras.i.velykyi@lpnu.ua

⁴ Computer Design Systems Department, Lviv Polytechnic National University, S. Bandery st. 12, Lviv, Ukraine, E-mail: iryna.i.verkhola@lpnu.ua, ORCID 0000-0001-5438-4511

RESEARCH OF VIBRATION OSCILLATIONS OF MEMS RESONATORS DURING THEIR OPERATION

Received: May 24, 2024 / Revised: June 14 2024 / Accepted: August 16, 2024

© Rebot D., Holubets M.-M., Velykyi N.-T., Verkhola I., 2024

Abstract. A mathematical model has been developed to study the amplitude-frequency characteristics of the resonator beam. Nonlinear mechanics methods were used in the modeling process. The model takes into account the influence of changes in the elastic properties of the beam material on its oscillation amplitude and frequency. To analyze the internal processes in the material, Voigt's and Bolotin's laws were applied. The modeling results showed that an increase in the elastic component of the beam material leads to a rise in the oscillation amplitude and a decrease in the oscillation frequency.

Keywords: mathematical model, oscillations, vibration, waves, elastic properties, MEMS, nonlinear mechanics