

Дмитро Паламарчук¹, Олександр Тимченко²¹Кафедра систем віртуальної реальності, Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери 12, Львів, Україна, E-mail: dmytro.palamarchuk@gmail.com, ORCID 0009-0000-3934-5899²Кафедра систем віртуальної реальності, Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери 12, Львів, Україна, E-mail: oleksandr.v.tymchenko@lpnu.ua, ORCID 0000-0001-6315-9375

ДИСКРЕТНА АПРОКСИМАЦІЯ У ЗАДАЧАХ РОЗМІЩЕННЯ ВЕКТОРНИХ ГРАФІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ НА ПЛОЩИНІ

Отримано: Лютий 03, 2025 / Переглянуто: Лютий 10, 2025 / Прийнято: Лютий 18, 2025

© Паламарчук Д., Тимченко О., 2025

<https://doi.org/>

Анотація. У статті розглянуто новий підхід до пошуку можливих варіантів розміщення векторних об'єктів на площині на основі дискретної апроксимації. Запропонований метод дозволяє значно зменшити обчислювальну складність задачі за рахунок перетворення векторних зображень у дискретну форму, представлену у вигляді піксельної сітки. Це забезпечує швидшу перевірку перетинів між об'єктами шляхом аналізу зайнятих елементів сітки, що спрощує процес моделювання розміщення графіків. У роботі описано алгоритм перевірки перетинів та його реалізацію у вигляді програмного забезпечення, яке дозволяє тестувати різні сценарії розміщення. Проведено аналіз точності та швидкості нового методу у порівнянні з традиційними підходами. Результати дослідження представлені у вигляді графіків та таблиць, що ілюструють ефективність дискретної апроксимації. Висновки демонструють високий потенціал методу для використання у задачах оптимального розміщення графіки, зокрема у виробництві, друкарській справі та комп'ютерній графіці. Запропонований підхід створює основу для подальших досліджень у напрямку застосування дискретної апроксимації у складних оптимізаційних задачах.

Ключові слова: дискретна апроксимація, векторні графічні об'єкти, перевірка перетинів, піксельна сітка, моделювання, оптимізація.

Вступ

У сучасних задачах, пов'язаних із розміщенням графічних об'єктів, таких як дизайн поліграфічної продукції, комп'ютерна графіка чи виробниче планування, часто виникає необхідність швидкого та точного визначення можливих позицій для розміщення нових об'єктів. Ключовою проблемою є перевірка перетинів між новими та вже розміщеними об'єктами, що вимагає значних обчислювальних ресурсів, особливо при роботі з векторними зображеннями.

Постановка проблеми

Традиційні методи, які базуються на геометричних операціях із векторами, мають високу обчислювальну складність, що обмежує їх застосування в задачах із великими обсягами даних або обмеженим часом виконання. Це створює потребу в розробці нових підходів, які б дозволили зменшити час перевірки без втрати точності.

У цьому контексті постає проблема створення швидкого та ефективного методу для пошуку можливих варіантів розміщення векторних об'єктів [1-3]. Один із перспективних підходів полягає у використанні дискретної апроксимації, що дозволяє перетворювати векторні зображення у піксельну форму та виконувати перевірки перетинів на рівні дискретних елементів. Такий підхід може значно прискорити процес розв'язання задачі та забезпечити його застосування у широкому спектрі практичних завдань.

Огляд сучасних джерел інформації за тематикою публікації

Дискретна апроксимація широко застосовується в задачах, що потребують переходу від безперервних до дискретних даних. Основна ідея цього підходу полягає у заміні складних об'єктів, які описуються аналітичними або геометричними методами, на дискретні структури, такі як сітки або матриці. Це спрощує обчислення та зменшує час їх виконання [2, 4, 5].

Значна частина сучасних досліджень зосереджена на використанні дискретної апроксимації у різних галузях. Наприклад:

- У комп'ютерній графіці апроксимація використовується для растеризації векторних об'єктів у пікселі, що дозволяє адаптувати графічні дані до екранів з обмеженою роздільною здатністю.

- У задачах фізичного моделювання, таких як симуляція руху рідини або поведінки матеріалів, дискретні моделі забезпечують високу швидкість обчислень без значних втрат точності.

- У задачах обробки зображень методи дискретизації застосовуються для аналізу форми об'єктів та їх взаємодії.

В контексті задач розміщення векторних зображень на площині дискретна апроксимація дозволяє суттєво спростити перевірку перетинів між об'єктами. Замість складних геометричних обчислень із векторними функціями, перевірка виконується шляхом аналізу зайнятих елементів сітки, які представляють графічний об'єкт.

Наукові праці з цієї тематики свідчать про високу ефективність дискретних методів для розв'язання складних задач оптимізації. Наприклад:

- У роботах з оптимізації розташування об'єктів (layout optimization) дискретна апроксимація допомагає швидко перевіряти обмеження, пов'язані з перетинами, і зменшувати кількість неприйнятних рішень.

- Використання піксельних моделей для апроксимації геометричних об'єктів продемонструвало значне скорочення часу обчислень у задачах пакування (packing problems) та розміщення (placement problems).

Таким чином, дискретна апроксимація виступає як потужний інструмент у задачах розміщення векторних зображень на площині, забезпечуючи баланс між швидкістю обчислень та точністю. Її ефективність особливо важлива для динамічних або інтерактивних систем, де швидкість обробки є критичним фактором.

Задача розміщення векторних зображень на площині передбачає врахування низки геометричних критеріїв, які забезпечують коректність і ефективність процесу [6]. До основних критеріїв належать:

- Відсутність перетинів між об'єктами. Головною умовою успішного розміщення є гарантія того, що новий об'єкт не перекриватиме вже розміщені. Перевірка перетинів є одним із найбільш ресурсоємних процесів, особливо при використанні традиційних геометричних методів. Для оптимізації цієї задачі можуть застосовуватися дискретні методи, які аналізують зайняті елементи сітки.

- Максимальне використання доступної площини. Важливо забезпечити мінімальний залишковий простір на площині, що дозволяє максимально ефективно використовувати доступну область. Цей критерій є ключовим у виробничих завданнях, таких як розкроювання матеріалів чи друк.

- Відповідність орієнтації об'єктів. У деяких задачах об'єкти повинні зберігати фіксовану орієнтацію або обертатися тільки в межах дозволених кутів. Наприклад, це актуально для графіків із текстовими елементами або специфічними геометричними обмеженнями.

- Межі площини. Усі об'єкти повинні бути розміщені в межах заданої площини. Це означає, що жоден елемент об'єкта не може виходити за межі доступної області.

- Простота перевірки умов. Перевірка критеріїв має бути простою та швидкою. Замість складних аналітичних обчислень перевірка може виконуватися на основі дискретних сіткових моделей, що спрощує реалізацію алгоритмів.

У відомих роботах часто наголошується на необхідності балансу між точністю перевірки критеріїв та швидкістю обчислень. Наприклад, використання сіткових моделей значно прискорює процес перевірки перетинів і дотримання меж площини.

Дотримання цих критеріїв є основою для розробки методів розміщення векторних зображень на площині, які враховують як вимоги до геометричної коректності, так і потреби практичних застосувань у різних галузях.

Цілі дослідження

Розробка методу пошуку можливих варіантів розміщення векторних об'єктів на площині на основі дискретної апроксимації для забезпечення швидкого та точного визначення позицій без перетинів.

Виклад основного матеріалу

У цьому розділі описано методику перетворення векторних зображень у піксельну форму, яка дозволяє оптимізувати процес перевірки перетинів і пошуку можливих варіантів розміщення. Особлива увага приділяється врахуванню ключових параметрів, таких як відступи між об'єктами, обертання графічних елементів та вибір оптимального розміру пікселів для дискретизації [7, 8].

Далі представлено алгоритм пошуку вільних місць для розміщення нових графічних об'єктів, що базується на аналізі зайнятих і вільних областей у дискретній сітці. Крім того, детально описано алгоритм перевірки перетинів, який забезпечує швидку і точну валідацію розташування об'єктів.

Описані методи закладають основу для створення ефективного інструменту, здатного вирішувати складні задачі розміщення векторних об'єктів на площині з високою швидкістю і точністю.

Дискретизація векторного зображення. Дискретизація векторного зображення полягає у заміні безперервного графічного об'єкта на дискретну структуру, представлену елементами сітки (клітинками). Це дозволяє зручно і швидко перевіряти зайнятість областей площини, що є основою для аналізу перетинів і пошуку вільних місць [9].

Опис процесу дискретизації:

1. Початкові дані:

- Векторне зображення (*Shape*) – об'єкт, що складається з геометричних елементів (прямокутників, полігонів, кривих тощо).

- Розмір клітинки сітки (*s*) – визначає роздільну здатність дискретизації.

- Відступ (*d*) – мінімальна відстань між об'єктами, яка враховується у вигляді буферної зони.

2. Створення буферної зони:

Графічний об'єкт розширюється з урахуванням відступу (*d/2*):

$$w' = w + d, h' = h + d. \quad (1)$$

Отриманий об'єкт (*ShapeWithOffset*) містить початкове зображення та буферну зону.

3. Розрахунок розмірів сітки:

Дискретизація об'єкта здійснюється за допомогою сітки, що накладається на область *ShapeWithOffset*:

$$M_{width} = \left\lceil \frac{w'}{s} \right\rceil, M_{height} = \left\lceil \frac{h'}{s} \right\rceil, \quad (2)$$

де *w'* і *h'* – габарити об'єкта з урахуванням відступів.

4. Аналіз зайнятості клітинок:

Для кожної клітинки (*i, j*), яка відповідає координатам (*x, y*) у сітці:

- Визначаємо межі клітинки:

$$x \in [i * s, (i + 1) * s), y \in [j * s, (j + 1) * s). \quad (3)$$

- Перевіряємо, чи перетинається клітинка з графічним об'єктом:

M[i][j] = true, якщо клітинка перетинається із *ShapeWithOffset*.

Процес роботи алгоритму зображено на рис. 1.

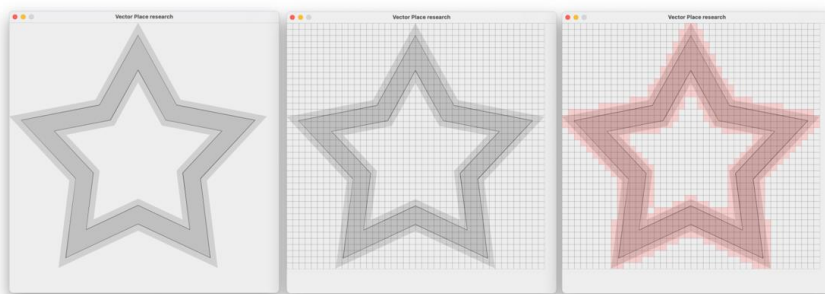


Рис. 1. Дискретизація векторного зображення

Алгоритм пошуку вільних місць і розміщення графіків. У цьому розділі описано алгоритм оптимального розміщення векторних об'єктів на площині з метою мінімізації висоти заповненої області [10]. Для цього об'єкти сортуються за розміром від більшого до меншого, дискретизуються у вигляді матриць з різних декількома варіантами обертання, і перевіряються можливі варіанти їх розташування з умовою прилягання до вже розміщених об'єктів. Розглянуто процес пошуку вільних місць, оцінку висоти розміщення та вибір найкращої позиції.

1. Вхідні дані:

- Площина розміром $W \times H$, де W – ширина площини, H – висота.
- Список графіків - набір векторних об'єктів $S_1, S_2, \dots, S_n$ із габаритами w_k, h_k .

2. Сортування графіків:

Сортуємо графіки за спаданням площі $A_k = w_k \cdot h_k$ за спаданням:

$$S = \text{sort}(S, \text{by descending area } A_k). \quad (4)$$

3. Підготовка дискретних матриць для графіків:

- Генеруємо набір дискретних матриць M_θ , де θ – кут повороту (наприклад, $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$).

- Кожна матриця $M_\theta[i][j]$ показує зайнятість клітинок після дискретизації для заданого кута.

4. Створення матриці площини:

Ініціалізуємо матрицю $P[i][j]$ розміром $W \times H$, заповнену значеннями *false* (вільні клітинки).

5. Розміщення графіків:

Використовуємо цикл для опрацювання кожного графіка:

- Шукаємо можливі варіанти розміщення нового графіка в обмеженій області: створюємо нову матрицю $P1$ розмір якої рівний розміру заповнених клітинок в матриці P і додаємо ширину W і висоту H нового графіка. Таким чином ми будемо шукати нову позицію лише в області де новий графік може прилягати до вже існуючих.

- Вибираємо варіант який знаходиться найближче до початку матриці по вертикалі і горизонталі.

- Заповнюємо матрицю розміщених графіків P новим елементом.

Приклад роботи додатку з розміщеними графіками зображено на рис. 2.

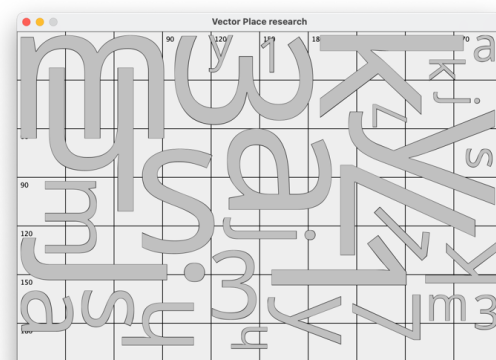


Рис. 2. Розміщення векторних зображень на площині

Проведення досліджень

Для проведення досліджень був обраний набір символів, що включає літери та цифри, які були перетворені у векторні зображення різного розміру. Літери та цифри обрані через їхню різноманітність форм, яка дозволяє перевірити роботу алгоритмів у різних умовах.

У дослідженні порівнювалися два підходи:

1. Перетин векторних зображень:

- Традиційний метод перевірки, який працює з безперервними геометричними об'єктами.
- Потребує аналітичного розрахунку перетинів між об'єктами.

2. Дискретизація (піксельний підхід):

- Векторні об'єкти перетворюються у дискретну форму з однаковим кроком (розміром клітини).

- Перевірка перетинів виконується шляхом аналізу зайнятих клітинок у матриці.

Параметри досліджень:

1. Крок дискретизації - розмір клітини.

2. Тестовий набір графіків: однаковий набір символів використовувався для обох підходів, символи обираються з масиву генератором випадкових чисел .

3. Розмір площини де будуть розміщуватися графіки.

Критерії оцінки:

- Час обчислень: вимірювався для перевірки перетинів усіх графіків.

- Якість: визначалася як висота площі яка залишилася вільною після розміщення графіків – чим більше площа тим краща якість

Для порівняння ефективності кожного з підходів було проведено дослідження з використанням різних наборів даних:

1. Площина - 150x150 см, розмір клітини - 2.0 см, кількість графіків – 9.

2. Площина - 170x170 см, розмір клітини – 2.5 см, кількість графіків – 12

3. Площина - 200x200 см, розмір клітини – 3.0 см, кількість графіків – 15.

Результати зображені на рис. 3-5 і таблиці 1. K – якість, см, n – номер експерименту/

Таблиця 1

Оцінки результатів роботи алгоритмів

Розмір площини	150x150 см	170x170 см	200x200 см
Середній час піксельного методу мс	26 мс.	25 мс.	27.9 мс.
Середній час векторного методу мс	16901 мс.	23902 мс.	31459 мс.
Середня якість піксельного методу см	40.4	60.5	102.4
Середня якість векторного методу см	51.6	65	109.8



Рис. 3. Порівняння результатів на площині 150 x 150 см

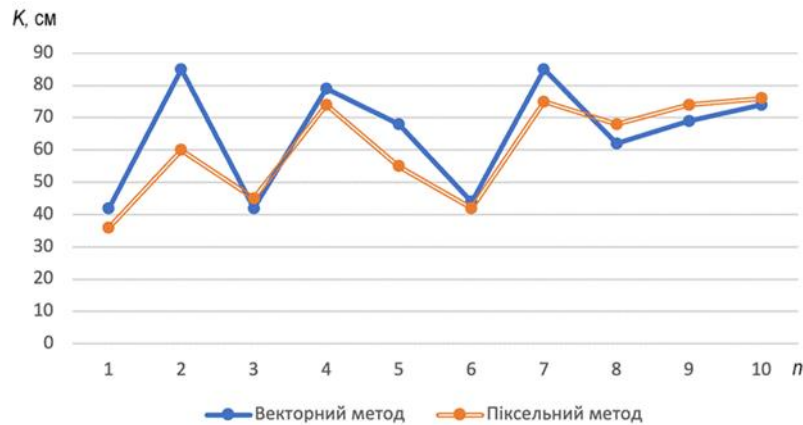


Рис. 4. Порівняння результатів на площині 170 x 170 см

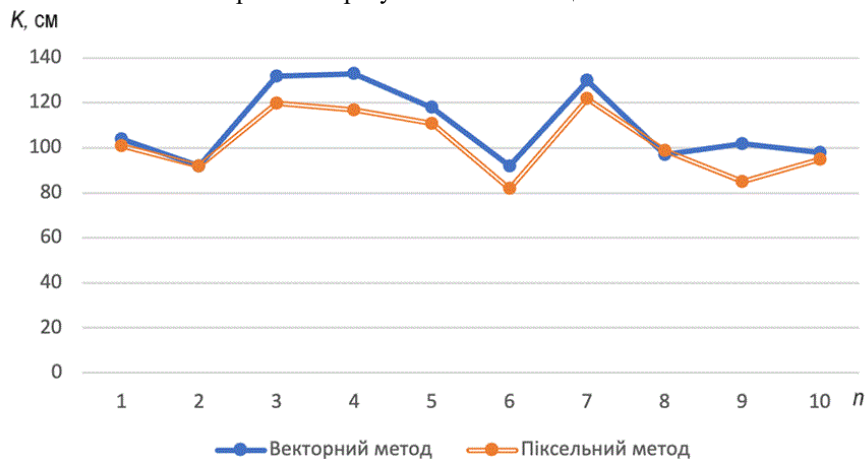


Рис. 5. Порівняння результатів на площині 200 x 200 см

Результати та обговорення

Дослідження показали, що дискретний піксельний метод суттєво переважає векторний за швидкістю, забезпечуючи середній час обчислень на рівні десятків мілісекунд, тоді як для векторного підходу він сягає десятків тисяч мілісекунд. Це особливо важливо для великих наборів даних. У середньому, піксельний метод працює приблизно в 900 разів швидше за векторний.

Векторний метод водночас демонструє кращу якість у більшості експериментів завдяки точнішому врахуванню форми об'єктів, проте потребує значно більших ресурсів. У середньому він в 1,14 рази кращий ніж піксельний підхід.

Також варто зауважити, що час перевірки зростає зі збільшенням площі, яку потрібно аналізувати. З меншою кількістю графіків векторний метод може працювати дещо швидше, однак навіть у цьому випадку він все одно істотно поступається піксельному за швидкістю.

З огляду на це, піксельний метод доцільно використовувати у задачах, де визначальними є швидкість і масштабованість. Векторний метод же лишається оптимальним для випадків, що вимагають максимальної точності.

Висновки

У роботі запропоновано ефективний метод пошуку можливих варіантів розміщення векторних об'єктів на площині на основі дискретної (піксельної) апроксимації. Представлений підхід суттєво прискорює процес перевірки перетинів та пошуку вільних позицій завдяки переходу від безперервних геометричних обчислень до аналізу зайнятих клітинок піксельної сітки. Результати дослідження показали, що в порівнянні з традиційним векторним методом запропонований піксельний підхід працює в сотні разів швидше, що робить його привабливим для завдань із великими обсягами даних та підвищеними вимогами до швидкодії. Водночас векторний

метод забезпечує дещо вищу точність, приблизно на 14%, отже його варто обирати у ситуаціях, де пріоритетом є максимально детальне врахування форми об'єктів.

Таким чином, дискретна апроксимація має високий потенціал для застосування у задачах оптимального розміщення векторної графіки в поліграфії, виробництві та комп'ютерній графіці. Використання піксельного підходу дозволяє досягти більшої швидкості та масштабованості, що особливо важливо при інтерактивній роботі та в умовах обмежених обчислювальних ресурсів. Отримані результати можуть слугувати основою для подальших досліджень у галузі складних оптимізаційних задач, а також стимулювати розвиток методів автоматизованого розміщення графічних елементів із урахуванням геометричних обмежень.

Подяка

Автори вдячні колегам за підтримку та слушні пропозиції, які дозволили вдосконалити матеріали статті.

Перелік використаних джерел

- [1] Palamarchuk D.Yu., Tymchenko O.V., Demchenko V.O. Application of optimization methods in the problem of placing vector graphic objects on a plane. Scientific notes. Issue 1 (68) / 2024. P. 61-70, <https://doi.org/10.32403/1998-6912-2024-1-68-61-70>
- [2] Tymchenko O.V., Gavrish B.M. Methods of evolutionary multi-criteria optimization. Scientific notes. Issue 2 (69) / 2024. P. 11-20, <https://doi.org/10.32403/1998-6912-2024-2-69-11-20>
- [3] J. Jiang, "Research and Application of Object Recognition Algorithm in Architectural Engineering Drawing Based on Deep Learning," 2023 Asia-Pacific Conference on Image Processing, Electronics and Computers (IPEC), Dalian, China, 2023, pp. 121-124, <https://doi.org/10.1109/IPEC57296.2023.00029>.
- [4] Pichuhin M. F., Kankin I. O., Vorotnikov V. V. "Computer Graphics." Center for Educational Literature. Kyiv, 2013.
- [5] Tolochko O. I., Palis S., Burmelov O. O., Kalugin D. V. "Discrete approximation of continuous dynamic objects in the MATLAB environment." Applied Aspects of Information Technology, 2021, Vol. 4, No. 2, pp. 178–191.
- [6] Romanyuk O. N. "Computer Graphics." Study guide. Vinnytsia National Technical University. Vinnytsia, 1999, pp. 39–43.
- [7] B. Havrysh, D. Palamarchuk, O. Tymchenko, B. Kovalskyi and O. Khamula. Efficiency of optimization algorithms in the problem of graphic objects placement / AdvAIT-2024: 1st International Workshop on Advanced Applied Information Technologies, December 5, 2024, Khmelnytskyi, Ukraine - Zilina, Slovakia/ p. 46-54. (Vol-3899, urn:nbn:de:0074-3899-X)
- [8] Sabelnikov P. Yu. "Approximation of an object's contour in an image using vector operations." Cybernetics and Computer Technologies, 2020, No. 3, pp. 85–89.
- [9] Lytvyn V. O. "Methods of discrete approximation in computer graphics tasks." Scientific Bulletin of KNU. Informatics and Computer Technology, 2015, No. 3, pp. 45–52.
- [10] Koval I. V. "Algorithmic methods for placing graphic objects on a plane." Collection of Scientific Papers of the National University, 2018, No. 4, pp. 110–118.

Dmytro Palamarchuk¹, Oleksandr Tymchenko²

¹Department of Virtual Reality Systems, Lviv Polytechnic National University, st. S. Bandera 12, Lviv, Ukraine, E-mail: dmytro.palamarchuk@gmail.com, ORCID 0009-0000-3934-5899

²Department of Virtual Reality Systems, Lviv Polytechnic National University, st. S. Bandera 12, Lviv, Ukraine, E-mail: oleksandr.v.tymchenko@lpnu.ua, ORCID 0000-0001-6315-9375

DISCRETE APPROXIMATION IN THE PROBLEMS OF PLACING VECTOR GRAPHIC OBJECTS ON A PLANE

Received: February 03, 2025 / Revised: February 10, 2025 / Accepted: February 18, 2025

© Palamarchuk D., Tymchenko O., 2025

Abstract. This article presents a new approach to finding possible placements of vector objects on a plane using discrete approximation. The proposed method significantly reduces the computational complexity of the problem by converting vector images into a discrete form represented by a pixel grid. This enables faster intersection checks between objects through the analysis of occupied grid elements, thus simplifying the process of modeling graphic placement. The paper describes an intersection-checking algorithm and its implementation in the form of software that allows testing various placement scenarios. An analysis of the accuracy and speed of the new method compared to traditional approaches is provided. The research results, presented in the form of graphs and tables, illustrate the effectiveness of the discrete approximation. Additionally, the modular design of the software simplifies its integration with existing optimization frameworks. Future work will focus on refining the accuracy of discrete representations and further expanding the method's application in parallel and distributed computing environments. The conclusions highlight the high potential of this method for use in optimal graphic placement tasks, particularly in manufacturing, printing, and computer graphics. The proposed approach lays the groundwork for further research into the application of discrete approximation in complex optimization problems.

Keywords: discrete approximation, vector graphic objects, intersection checking, pixel grid, modeling, optimization.