

УДК ?????

А.С.Куцук

Національний університет "Львівська політехніка",
каф. електромехатроніки та комп'ютеризованих електромеханічних систем,
andrii.s.kutsyk@lpnu.ua,

А.С.Ліщук

Національний університет "Львівська політехніка",
каф. електромехатроніки та комп'ютеризованих електромеханічних систем,
andrii.s.lishchuk@lpnu.ua.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ СИНХРОННОЇ МАШИНИ З ПОСТІЙНИМИ МАГНІТАМИ НА ОСНОВІ МЕТОДУ СЕРЕДНІХ НАПРУГ НА КРОЦІ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ

<https://doi.org/10.23939/sepes2025.01.039>

© А.С.Куцук, А.С.Ліщук, 2025

Синхронні машини з постійними магнітами (СМПМ) набули широкого поширення в сучасних електроприводах та генераторних установках завдяки поєднанню високої енергоефективності, компактних габаритів і надійності. Вони характеризуються підвищеною питомою потужністю, відсутністю втрат у збуджувальних колах та зменшеним енергоспоживанням. Водночас фіксований магнітний потік, створюваний постійними магнітами, накладає специфічні вимоги до математичного моделювання, особливо при розробленні алгоритмів керування та дослідженні робочих режимів.

Для аналізу таких машин традиційно застосовуються моделі у фазних, або ортогональних координатах. Спрощені моделі у прямокутних координатах дозволяють швидко виконувати обчислення, проте вони не здатні відобразити поведінку машини в несиметричних режимах, різних схемах з'єднання обмоток чи у багатофазних конфігураціях. Це суттєво знижує їхню придатність у складних енергетичних і електромеханічних системах.

У даній роботі представлено математичну модель синхронної машини з поверхневим розміщенням постійних магнітів, реалізовану у фазних координатах. При побудові моделі застосовано метод середніх напруг на кроці чисельного інтегрування, що забезпечує високу числову стійкість розрахунків та підвищенні кроку чисельного інтегрування і дає змогу збільшити швидкодію обчислень. Запропонований підхід розширює можливості аналізу: він дозволяє розглядати не лише симетричні, а й несиметричні режими, а також реалізовувати різні схеми під'єднання навантаження.

Проведено комплексну верифікацію запропонованої моделі: з одного боку, шляхом порівняння результатів математичного моделювання генераторного режиму роботи з аналітичними розрахунками зовнішніх статичних характеристик синхронної машини з постійними магнітами, а з іншого — за допомогою аналогічної моделі, реалізованої в середовищі Matlab/Simulink, для дослідження поведінки машини в перехідних режимах.

Отримані результати підтвердили адекватність запропонованої моделі як для ustalених, так і для динамічних режимів роботи.

Ключові слова: синхронна машина з поверхневим розміщенням постійних магнітів, математична модель, метод середніх напруг на кроці інтегрування.

Вступ. Аналіз останніх досліджень.

Проблематика математичного моделювання синхронних машин з постійними магнітами (СМПМ) сьогодні залишається одним із ключових напрямів розвитку електромеханіки та електроприводів. Вибір адекватної моделі визначає не лише точність відтворення електромагнітних процесів, а й ефективність побудови систем керування, діагностики та інтеграції з відновлюваними джерелами енергії. Сучасні дослідження концентруються на двох протилежних, але взаємодоповнюваних завданнях: з одного боку – на підвищенні точності математичних моделей шляхом урахування складних нелінійних ефектів, з іншого – на створенні обчислювально ефективних спрощених моделей, придатних для роботи у реальному часі.

У роботі [1] представлено високоточне моделювання СМПМ із використанням методу кінцевих елементів (FEM). Такий підхід дає змогу врахувати насичення магнітопроводу, розподіл поля у повітряному проміжку та гармонічні складові магнітного потоку. Однак головним обмеженням є висока обчислювальна складність, що робить моделі, побудовані на основі методу скінченних елементів, малоприматними для інтеграції у системи керування в реальному часі. Подібні висновки підтверджують і більш нові дослідження [2], де розглянуто симуляцію СМПМ в усьому діапазоні швидкостей, включно з режимами послаблення потоку. Це особливо актуально для електроприводів транспортних систем, де робота машини в широкому спектрі навантажень є стандартною вимогою.

Важливою є також увага до конструктивних удосконалень. У праці [3] автори пропонують модифікації магнітної системи синхронних машин, що дозволяють підвищити ефективність на високих швидкостях. У свою чергу, у статті [4] розроблено модель СМПМ, адаптовану до методів високочастотної інжекції сигналу, що забезпечує надійне бездавачеве визначення полярності магнітів. Це особливо актуально для машин із поверхневим розташуванням магнітів, де відмінність між індуктивностями по осях d та q практично відсутня і традиційні методи визначення положення ротора працюють нестабільно.

Значного розвитку набули й дослідження багатофазних СМПМ. У роботах [5, 18] розглядається побудова п'ятифазних систем, що підвищує відмовостійкість і зменшує амплітуду вищих гармонічних складових у моменті. Публікації [6, 17] концентрують увагу на моделюванні несправностей, зокрема міжвиткових замиканнях у статорних обмотках. Використання таких моделей дозволяє досліджувати поведінку машини у аварійних режимах і розробляти алгоритми діагностики, що є надзвичайно важливим для підвищення надійності електроприводів у промислових застосуваннях.

Окрему групу становлять праці, пов'язані з відновлюваною енергетикою. У дослідженнях [8, 10, 12, 13] розглянуто моделі СМПМ у складі вітроенергетичних установок. Тут актуальним є не лише опис динаміки генератора, але й його взаємодія з системами перетворення енергії та алгоритмами керування. Важливо, що у [9] та [13] акцент зроблено на використанні адаптивних методів керування (зокрема ковзного режиму), які потребують математичних моделей із достатнім рівнем адекватності та швидкодії.

У новітніх роботах також простежується акцент на підвищенні енергоефективності. Наприклад, в праці [11] описують проектування 3-кВт СМПМ класу «Super Premium Efficiency», що потребувало точних моделей електромагнітних процесів для оптимізації конструкції. Подібні дослідження відображають тенденцію до тісного поєднання конструктивних і математичних аспектів при створенні високоефективних електричних машин.

Нарешті, ключовим напрямом є розвиток методів швидкодіючого моделювання [14, 15, 16]. Метод середніх напруг на кроці чисельного інтегрування (СНКІ) дозволяє суттєво збільшити швидкодію обчислень завдяки апроксимації миттєвих величин середніми за інтервал інтегрування. Це забезпечує високу числову стійкість навіть при використанні великих кроків інтегрування, що особливо важливо для тестування з апаратною інтеграцією (Hardware-in-the-Loop, HIL) та побудови моделей у режимі реального часу. Практична цінність методу підтверджується роботами [15, 16], де даний метод застосовано для математичного моделювання синхронної машини з електромагнітним збудженням (СМ). У статті [19] додатково наголошено на можливості використання лінеаризованих моделей СМПМ для аналізу стійкості та покращення динаміки при керуванні швидкістю.

Таким чином, аналіз літературних джерел показує, що актуальним є питання розроблення обчислювально-ефективних підходів до моделювання СМПМ. Одним з таких підходів є застосування методу середніх напруг на кроці чисельного інтегрування який поєднує високу швидкодію, числову стійкість та достатню точність опису процесів у машині.

Об'єкт дослідження

Об'єктом дослідження є математичне моделювання синхронної машини з постійними магнітами, у якій формування магнітного потоку здійснюється за рахунок постійних магнітів, розміщених на зовнішній поверхні ротора (неявнополісна машина).

Математична модель синхронної машини з поверхневим розміщенням постійних магнітів

Математичну модель синхронної машини з постійними магнітами сформовано із застосуванням методу середніх напруг на кроці чисельного інтегрування. Як показано у низці досліджень [7, 15, 16], використання цього методу забезпечує високу стійкість обчислень та швидкодію моделювання у фазних координатах, що робить його зручним для аналізу динамічних режимів. На відміну від описаних в даних роботах моделей синхронних машин з електромагнітним збудженням, у даній роботі розглядається машина, в якій основний магнітний потік формується за рахунок постійних магнітів ротора.

Для побудови математичної моделі використано типові допущення, зокрема, розподіл магнітного потоку в повітряному проміжку вважався синусоїдним (не враховувався вплив вищих просторових гармонік), не враховувалися втрати в сталі, не враховувалися демпферні контури ротора, вплив яких в синхронній машині з постійними магнітами є незначний.

Представимо кожен фазу статора СМ у вигляді електричної вітки як показано на рис.1.

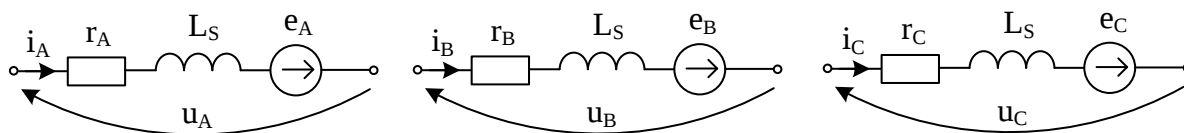


Рис. 1. Електричні вітки статора СМ

де L_s – індуктивність розсіювання.

Е.р.с. фаз статора СМПМ визначаються як

$$\begin{aligned} e_A &= \frac{d\psi_A}{dt} = \frac{z_p \omega_R}{\sqrt{3}} (\psi_C - \psi_B), \\ e_B &= \frac{d\psi_B}{dt} = \frac{z_p \omega_R}{\sqrt{3}} (\psi_A - \psi_C), \end{aligned} \quad (1)$$

$$e_C = \frac{d\psi_C}{dt} = \frac{z_p \omega_R}{\sqrt{3}} (\psi_B - \psi_A),$$

де ω_R – кутова швидкість; z_p – кількість пар полюсів.

Потокозчеплення фаз статора в рівнянні (1) будуть рівні:

$$\psi_A = L_{ad} i_A + \psi_{fA}, \quad \psi_B = L_{ad} i_B + \psi_{fB}, \quad \psi_C = L_{ad} i_C + \psi_{fC}, \quad (2)$$

де ψ_{fA} , ψ_{fB} , ψ_{fC} – проекції потокозчеплення від постійних магнітів на осі обмотки статора, які визначаються як:

$$\psi_{fA} = \psi_f \cos(\gamma), \quad \psi_{fB} = \psi_f \cos(\gamma - \rho), \quad \psi_{fC} = \psi_f \cos(\gamma + \rho), \quad (3)$$

де $\rho = 2\pi/3$, ψ_f – модуль потокозчеплення від постійних магнітів, γ – кут повороту ротора, похідна якого визначається як $d\gamma/dt = z_p \omega_R$.

Струми обмоток статора та ротора визначаються з диференціальних рівнянь, які описують електричну схему вітки (рис. 1):

$$\frac{di_A}{dt} = \frac{u_A + e_A - r_A i_A}{L_s}, \quad \frac{di_B}{dt} = \frac{u_B + e_B - r_B i_B}{L_s}, \quad \frac{di_C}{dt} = \frac{u_C + e_C - r_C i_C}{L_s}, \quad (4)$$

Електромагнітний момент СМПМ буде рівний:

$$M_{SM} = \frac{z_p}{2} (\psi_A (i_C - i_B) + \psi_B (i_A - i_C) + \psi_C (i_B - i_A)). \quad (5)$$

Швидкість обертання СМПМ визначається з рівняння

$$\frac{d\omega_R}{dt} = \frac{M_{SM} + M_e}{J}, \quad (6)$$

де M_e – зовнішній момент на валу, J – сумарний момент інерції, приведений до вала СМПМ.

Для алгебраїзації рівнянь синхронної машини використаємо метод середніх напруг на кроці чисельного інтегрування (СНКИ) [15]. З застосуванням даного методу в роботі [15] отримано рівняння для вітки, де невідомими виступають струм вітки в кінці кроку інтегрування i_1 та середня на кроці напруга вітки U :

$$\begin{aligned} U + E - u_{R0} - u_{C0} + \left(\frac{R}{m+1} + \frac{\Delta t}{C} \cdot \frac{2 - (m+1)(m+2)}{2(m+1)(m+2)} + \frac{L_0}{\Delta t} \right) i_0 - \\ - \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{R \Delta t^k}{(k+1)!} \cdot \frac{m-k}{m+1} + \frac{\Delta t^{k+1}}{C(k+2)!} \cdot \frac{(m+1)(m+2) - (k+1)(k+2)}{(m+1)(m+2)} \right) \frac{d^{(k)} i_0}{dt^{(k)}} - \\ - \left(\frac{R}{m+1} + \frac{\Delta t}{C(m+1)(m+2)} + \frac{L_1}{\Delta t} \right) i_1 = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

де i_0 – струм вітки на початку кроку інтегрування; L_0 , L_1 – індуктивність вітки на початку та в кінці кроку, m – порядок полінома, яким описується крива струму на кроці інтегрування (порядок методу); Δt – крок чисельного інтегрування.

Згідно з методом середніх напруг на кроці інтегрування 2-го порядку електрична вітка, що містить активний опір R , індуктивність L та є.р.с., описується таким рівнянням

$$U + E - R i_0 + \left(\frac{R}{3} + \frac{L_0}{\Delta t} \right) i_0 - \frac{R \Delta t}{6} \frac{di_0}{dt} - \left(\frac{R}{3} + \frac{L_1}{\Delta t} \right) i_1 = 0 \quad (8)$$

Застосувавши рівняння (8) до розрахункової схеми синхронної машини з постійними магнітами (рис. 1) отримаємо наступні рівняння (індекс 0 відповідає значенню змінної на початку кроку, індекс 1 – в кінці кроку):

$$\begin{aligned} i_{A1} &= \left(\frac{r_A}{3} + \frac{L_S}{\Delta t} \right)^{-1} \times \left(U_A + E_A - r_A i_{A0} + \left(\frac{r_A}{3} + \frac{L_S}{\Delta t} \right) i_{A0} - \frac{r_A \Delta t}{6} \frac{di_{A0}}{dt} \right), \\ i_{B1} &= \left(\frac{r_B}{3} + \frac{L_S}{\Delta t} \right)^{-1} \times \left(U_B + E_B - r_B i_{B0} + \left(\frac{r_B}{3} + \frac{L_S}{\Delta t} \right) i_{B0} - \frac{r_B \Delta t}{6} \frac{di_{B0}}{dt} \right), \\ i_{C1} &= \left(\frac{r_C}{3} + \frac{L_S}{\Delta t} \right)^{-1} \times \left(U_C + E_C - r_C i_{C0} + \left(\frac{r_C}{3} + \frac{L_S}{\Delta t} \right) i_{C0} - \frac{r_C \Delta t}{6} \frac{di_{C0}}{dt} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Середні на кроці чисельного інтегрування значення е.р.с. визначаються як

$$E_A = e_{A0} + \frac{de_A}{dt} \frac{\Delta t}{2}, \quad E_B = e_{B0} + \frac{de_B}{dt} \frac{\Delta t}{2}, \quad E_C = e_{C0} + \frac{de_C}{dt} \frac{\Delta t}{2}. \quad (10)$$

Похідні фазних е.р.с. визначимо з рівняння (1):

$$\begin{aligned} \frac{de_A}{dt} &= \frac{z_p \omega_R}{\sqrt{3}} \left(\frac{d\psi_C}{dt} - \frac{d\psi_B}{dt} \right) + \frac{z_p}{\sqrt{3}} \frac{d\omega_R}{dt} (\psi_C - \psi_B), \\ \frac{de_B}{dt} &= \frac{z_p \omega_R}{\sqrt{3}} \left(\frac{d\psi_A}{dt} - \frac{d\psi_C}{dt} \right) + \frac{z_p}{\sqrt{3}} \frac{d\omega_R}{dt} (\psi_A - \psi_C), \\ \frac{de_C}{dt} &= \frac{z_p \omega_R}{\sqrt{3}} \left(\frac{d\psi_B}{dt} - \frac{d\psi_A}{dt} \right) + \frac{z_p}{\sqrt{3}} \frac{d\omega_R}{dt} (\psi_B - \psi_A), \end{aligned} \quad (11)$$

де похідні потокозчеплень статора згідно з (2) будуть рівні:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_A}{dt} &= L_{ad} \frac{di_A}{dt} + \frac{d\psi_{fA}}{dt} = L_{ad} \frac{di_A}{dt} - z_p \omega_R \sin(\gamma), \\ \frac{d\psi_B}{dt} &= L_{ad} \frac{di_B}{dt} + \frac{d\psi_{fB}}{dt} = L_{ad} \frac{di_B}{dt} - z_p \omega_R \sin(\gamma - \rho), \\ \frac{d\psi_C}{dt} &= L_{ad} \frac{di_C}{dt} + \frac{d\psi_{fC}}{dt} = L_{ad} \frac{di_C}{dt} - z_p \omega_R \sin(\gamma + \rho). \end{aligned} \quad (12)$$

Алгоритм розв'язування рівнянь математичної моделі на кроці чисельного інтегрування такий:

1. За формулами (3) визначаємо проекції потокозчеплення від постійних магнітів на осі обмотки статора; за формулами (2), на основі значень струмів статора і потокозчеплення від постійних магнітів на початку кроку, визначаємо потокозчеплення фаз статора ψ_A , ψ_B , ψ_C ; за формулами (1) визначаємо е.р.с. фаз статора e_A , e_B , e_C .

2. За формулами (4) визначаємо похідні струмів статора.

3. За формулою (5) визначаємо електромагнітний момент СМПМ.

4. За формулою (6) визначаємо похідну швидкості СМПМ.

5. За формулами (12) визначаємо похідні потокозчеплень статора.

6. За формулами (11) визначаємо похідні е.р.с. статора.

7. За формулами (10) визначаємо середні на кроці інтегрування значення е.р.с. фаз статора E_A , E_B , E_C .

8. За формулами (9) визначаємо струми статора i_{A1} , i_{B1} , i_{C1} в кінці кроку інтегрування.

Вхідною інформацією для розрахунку є: напруги, прикладені до фаз статора, значення змінних на початку кроку, електромагнітні параметри, зовнішній момент на валу СМПМ.

Верифікація математичної моделі синхронної машини з постійними магнітами

Верифікація математичної моделі синхронної машини з постійними магнітами проводилася для параметрів синхронної машини з поверхневим розміщенням магнітів, наведених у [19]. Параметри синхронної машини наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Параметри синхронної машини з поверхневим розміщенням магнітів (СМПМ)

Параметр машини	Значення
Номінальна потужність, P	2 кВт
Номінальна напруга, V	240 В
Номінальна швидкість, ω	1500 об/хв
Індуктивність по d-осі та q-осі, L_d та L_q	0.0171 Гн
Потік від постійних маг., λ_{af}	0.321 Вб
Кількість пар полюсів, z_p	2
Опір обмотки статора, r_s	0.35 Ом
Частота, f	50 Гц

Для підтвердження адекватності створеної математичної моделі проведено розрахунок статичних зовнішніх характеристик – залежність вихідної напруги від струму для різного характеру навантаження. Результати моделювання порівнювалися аналітичними розрахунками зовнішніх характеристик на основі заступної схеми фази синхронної машини з постійними магнітами, яка показана на рис.2.

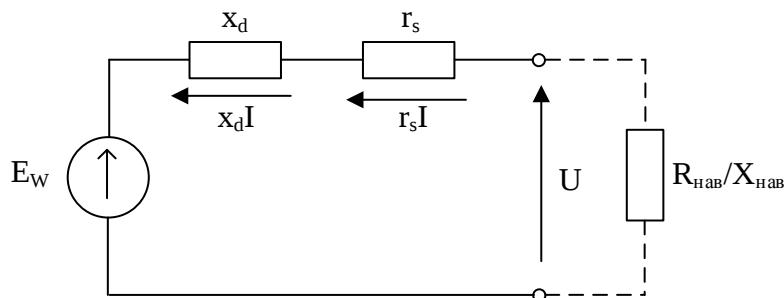


Рис. 2. Заступна схема фази синхронної машини з постійними магнітами

Аналітичний розрахунок зовнішніх характеристик проводився на основі векторних діаграм, побудованих для даної схеми заміщення (рис.2) для двох граничних випадків навантаження – активного (рис.3, а) та індуктивного (рис.3, б).

На основі векторних діаграм зображених на рис.3 (а) та (б) можна записати вирази для внутрішньої ЕРС E_w у випадку:

- активного навантаження:

$$E_w = \sqrt{(U + r_s I)^2 + (x_d I)^2} . \quad (13)$$

- індуктивного навантаження:

$$E_w = \sqrt{(U + x_d I)^2 + (r_s I)^2} . \quad (14)$$

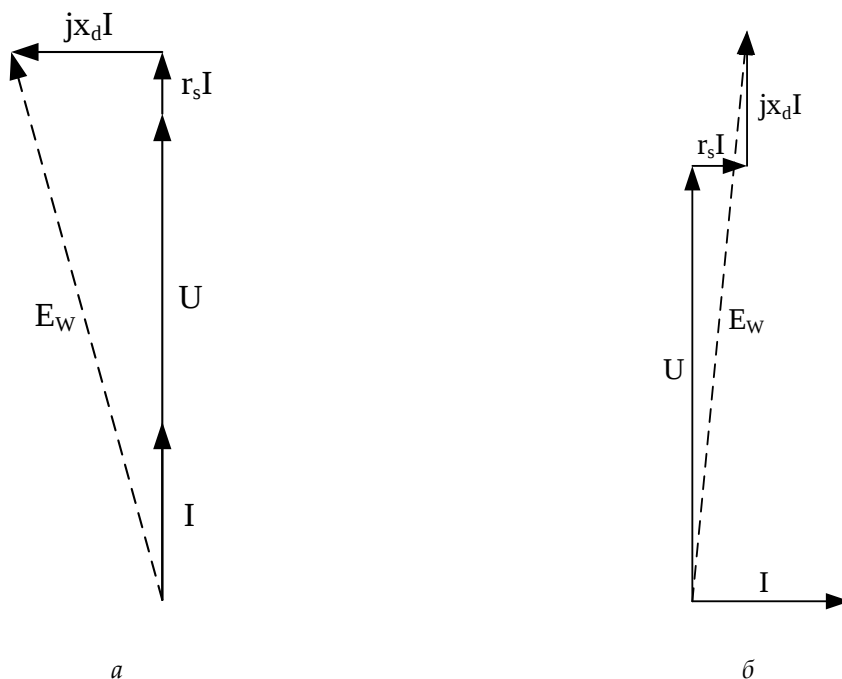


Рис. 3. Векторні діаграми для граничних режимів навантаження:

а – активне, б – індуктивне навантаження.

На основі виразів (13) та (14) виведено рівняння для знаходження вихідної напруги синхронної машини:

$$U_{акт.н} = \sqrt{E_w^2 - (x_d I)^2} - (r_s I). \quad (15)$$

$$U_{інд.н} = \sqrt{E_w^2 - (r_s I)^2} - (x_d I). \quad (16)$$

Для розрахунку статичних характеристик швидкість обертання ротора задавалася сталою і рівною $\omega=157.07$ рад/с, що відповідає синхронній частоті 50 Гц.

Модуль ЕРС СМ визначається за відомим співвідношенням:

$$E_w = \lambda_{af} z_p \cdot 2\pi f = 0,321 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 = 201,69 В.$$

Результати верифікації математичної моделі синхронної машини для статичних зовнішніх характеристик зведено в таблиці 2 та 3, де наведено амплітудні значення фазного струму машини I , фазної напруги, визначеної в результаті моделювання $U_{мод.}$, та аналітично розрахованої амплітуди напруги $U_{аналіт.}$, обчисленої за виразами (15) та (16) відповідно для активного й індуктивного навантаження. Додатково в таблицях подано відносну похибку $\Delta U, \%$, яка характеризує відхилення результатів моделювання від аналітичних значень. Це дозволяє кількісно оцінити адекватність математичної моделі та визначити рівень її точності для усталеного режиму роботи.

Таблиця 2

**Порівняння результатів математичного моделювання та аналітичних розрахунків
для активного навантаження ($\omega = \text{const}$, $E_w = \text{const}$)**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I, A	11,1038	10,0427	9,16065	8,77366	7,49832	6,1124	5,18089	3,4298	2,66954	0,682701
$U_{мод.}, B$	188,77	190,811	192,374	193,021	194,987	196,845	197,986	199,69	200,29	201,397
$U_{аналіт.}, B$	188,726	190,781	192,351	193,001	194,978	196,844	197,936	199,641	200,242	201,4175
$\Delta U, \%$	0,02082	0,01542	0,01168	0,01014	0,00460	0,00059	0,02539	0,02442	0,02388	0,010184

Таблиця 3

Порівняння результатів математичного моделювання та аналітичних розрахунків для індуктивного навантаження ($\omega = \text{const}$, $E_w = \text{const}$)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I, A	11,654	10,5093	9,29247	8,5501	7,54567	6,68059	5,53151	3,67605	2,02624	0,44689
U _{мод.} , В	139,004	145,16	151,704	155,697	161,105	165,759	171,98	181,767	190,78	199,333
U _{аналіт.} , В	138,859	145,034	151,597	155,601	161,018	165,682	171,878	181,880	190,772	199,2822
ΔU , %	0,10434	0,08672	0,07019	0,06146	0,05406	0,04612	0,05939	0,06214	0,00434	0,025499

Результати свідчать про високе співпадіння результатів моделювання та аналітичних розрахунків та про адекватність розробленої моделі в зазначених режимах.

Графіки миттєвих значень фазних струмів та напруг синхронної машини, отримані шляхом математичного моделювання у випадку чисто активного навантаження в усталеному режимі показано на рис.4.

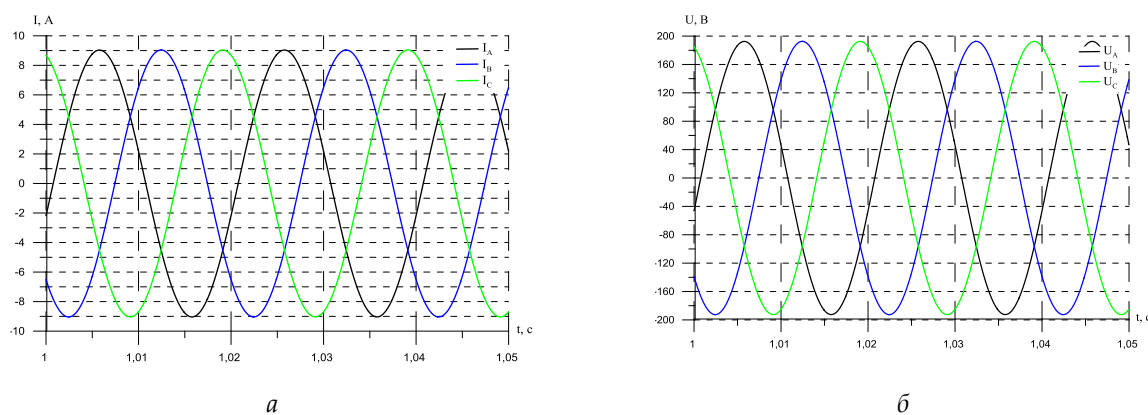


Рис. 4. Результати моделювання усталеного режиму для активного навантаження:
а – фазні струми, б – фазні напруги

Наступним етапом дослідження був аналіз динамічних режимів роботи синхронної машини з постійними магнітами, зокрема перехідних процесів при зміні навантаження та швидкості. Для підтвердження адекватності розробленої математичної моделі в динамічних режимах було здійснено порівняння отриманих динамічних характеристик із результатами моделювання в середовищі Matlab/Simulink з використанням стандартного блоку моделі СМІМ у поєднанні з блоком навантаження, що дає змогу відтворити характерні режими роботи машини.

На рис. 5 подано часові діаграми фазних струмів (рис.5, а, б), фазних напруг (рис.5, в, г) електромагнітного моменту (рис.5, д, е) електричної потужності на виході (рис.5, є, ж) та швидкості (рис.5, з, і) у випадку зміни навантаження при сталій швидкості обертання. Зліва (рис. 5, а, в, д, є) наведені результати, отримані на розробленій математичній моделі, а справа (рис. 5, б, г, е, ж) – результати моделювання у середовищі Matlab/Simulink, що дає змогу здійснити порівняння та оцінити адекватність моделі.

У момент $t = 0,5$ с накид навантаження зумовлює зростання амплітуди фазних струмів (рис. 5, а, б) та появу незначного просідання напруги (рис. 5, в, г). При подальшому збільшенні навантаження в інтервалі $t = 1\text{--}1,5$ с струми зростають ще більше, а падіння напруги стає виразнішим. Після зменшення навантаження ($t > 1,5$ с) спостерігається відновлення напруги та зменшення амплітуди струмів. Динаміка, отримана у розробленій математичній моделі, добре узгоджується з результатами аналогічного моделювання у середовищі Matlab/Simulink – форми кривих та їх амплітуди збігаються.

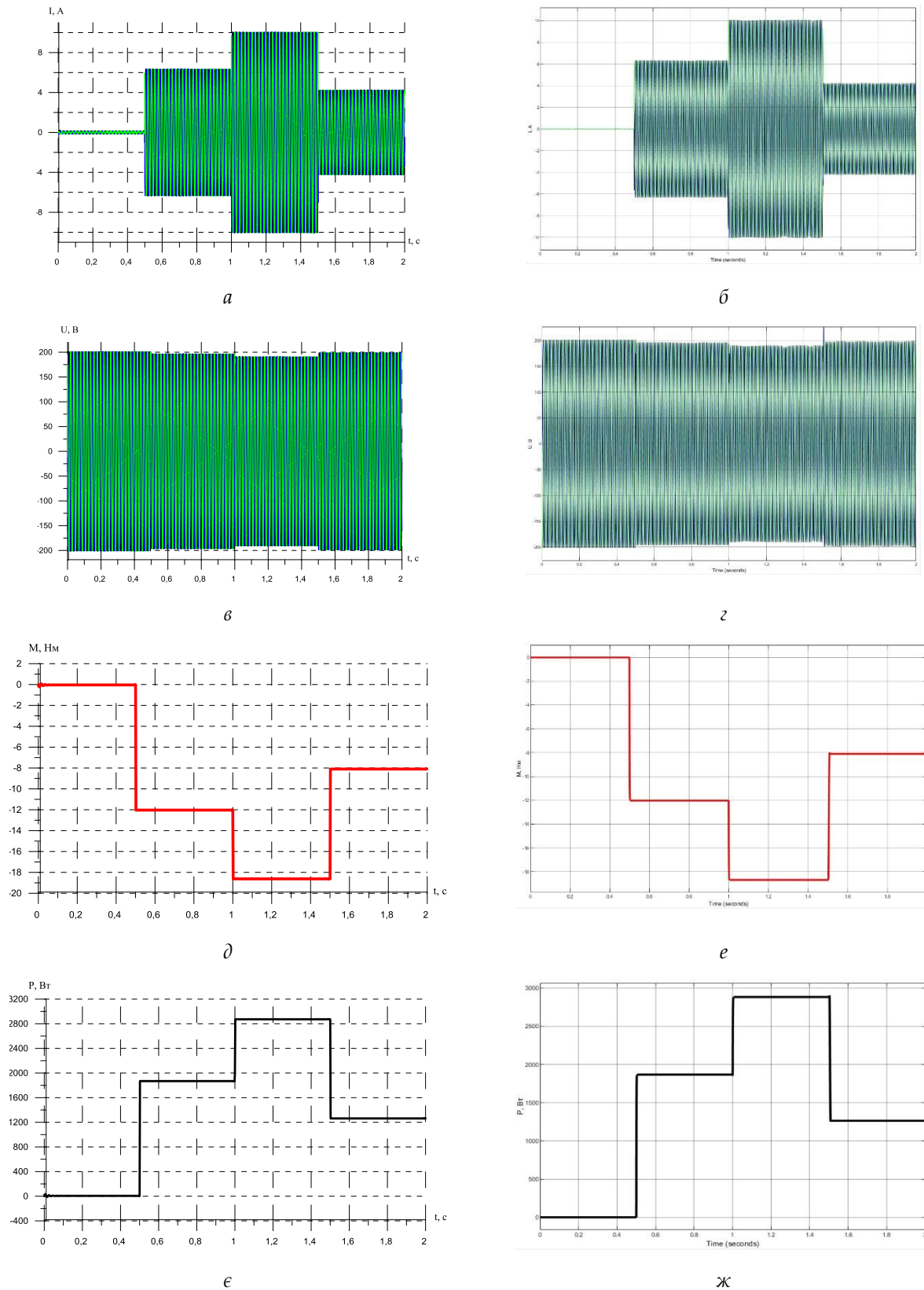


Рис. 5. Зміна навантаження при сталій швидкості обертання: а, б – фазні струми; в, г – фазні напруги; д, е – електромагнітний момент; ж, з – електрична потужність на виході; а, в, д, е – результати, отримані на розробленій математичній моделі; б, г, ж, з – результати моделювання у середовищі Matlab/Simulink.

На рис. 6 представлено часові залежності фазних струмів (рис.6, а, б), фазних напруг (рис.6, в, г) електромагнітного моменту (рис.6, д, е) електричної потужності на виході (рис.6, є, ж) та швидкості (рис.6, з, і) за умови зміни зовнішнього моменту на валу, який, в цьому випадку був вхідним сигналом для моделі (подібно як і в типовій моделі СМПМ в середовищі Matlab/Simulink). У момент часу $t = 0,5$ с зовнішній момент на валу стрибкоподібно збільшувався до 12 Нм, а в момент часу 1 с плавно зменшувався до 6 Нм. Порівняння результатів, отриманих за допомогою розробленої математичної моделі та моделі у середовищі Matlab/Simulink показує їх повну ідентичність у перехідних і усталених режимах.

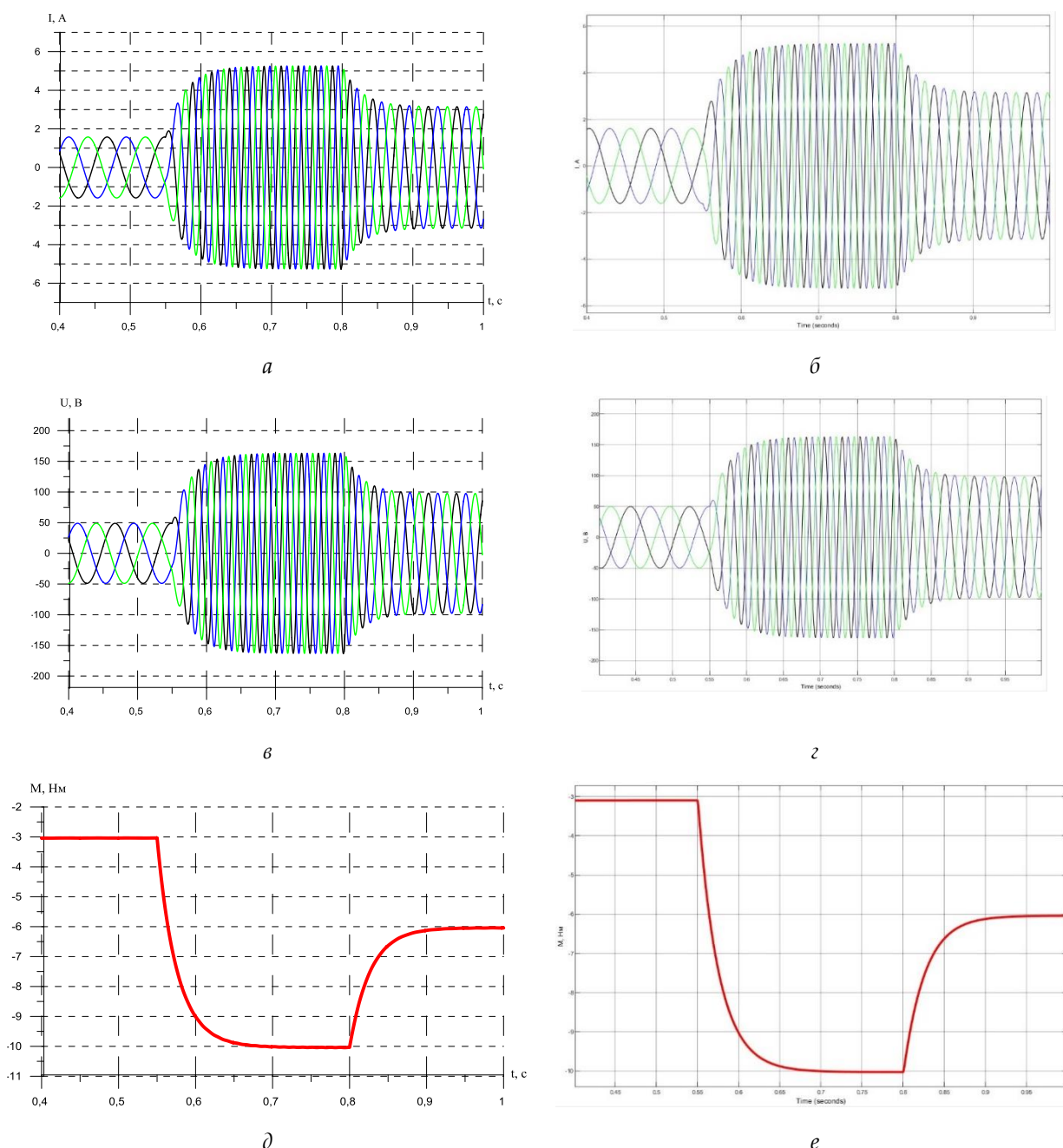


Рис. 6. Перехідні процеси у випадку зміни зовнішнього моменту на валу СМПМ : а, б – фазні струми, в, г – фазні напруги, д, е – електромагнітний момент; а, в, д, є, з – результати, отримані на розробленій математичній моделі; б, г, е, ж, і – результати моделювання у середовищі Matlab/Simulink.

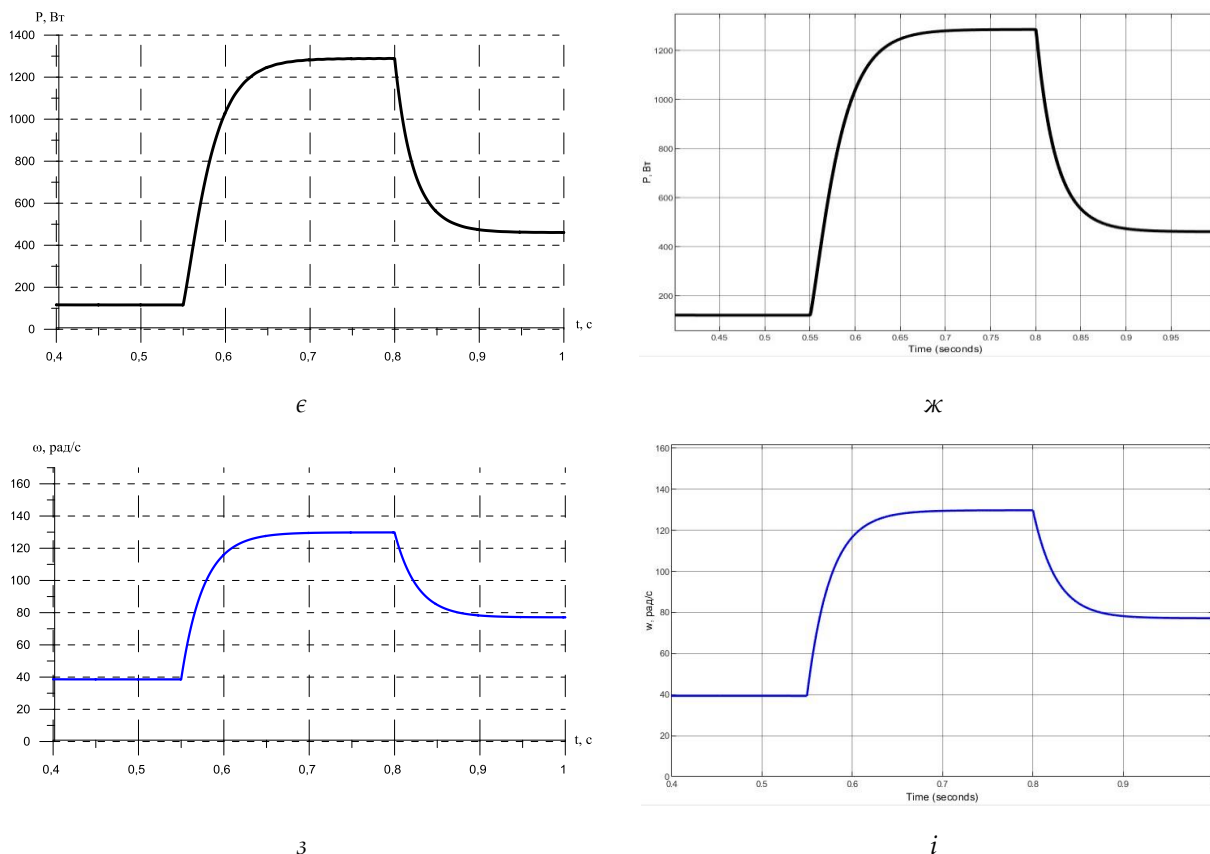


Рис. 6. (Продовження). Перехідні процеси у випадку зміни зовнішнього моменту на валу СМПМ : $\epsilon, \mathcal{J}$ - електрична потужність на виході, $3, i$ - швидкість; а, в, д, е, з - результати, отримані на розробленій математичній моделі; б, г, е, ж, і - результати моделювання у середовищі Matlab/Simulink.

Для порівняння швидкодії розрахунку було проведено розрахунок часового інтервалу тривалістю 60 с за допомогою розробленої моделі, реалізованої програмно мовою C++ (для програмної реалізації розробленої моделі використано об'єктно-орієнтований метод та програмне середовище, описані в [15,20]) та за допомогою типової моделі у середовищі Matlab/Simulink. Тривалість розрахунку з кроком чисельного інтегрування 0.0002 с для розробленої моделі склала 2.7 с, тоді як для моделі в середовищі Matlab/Simulink і аналогічного кроку – 12,7 с (з використанням методу чисельного інтегрування ode1be (backward Euler), що дав найкращий результат, порівняно з іншими методами). Зазначимо, що навіть десятикратне збільшення кроку (до величини 0,002 с.) в розробленій моделі не вплинуло на стабільність і точність обчислень, що свідчить про високу числову стійкість. Значне збільшення кроку, однак, призводить до втрати інформації щодо форми кривих синусоїдних струмів і напруг.

Висновки

Застосування методу середніх напруг на кроці чисельного інтегрування дозволило створити математичну модель синхронної машини з постійними магнітами у фазних координатах, яка вирізняється високою швидкістю і числовою стійкістю, тобто здатністю виконувати обчислення зі збільшеною величиною кроку чисельного інтегрування, що притаманне використаному методу. Порівняно з типовою моделлю в середовищі Matlab/Simulink швидкодія розробленої моделі є більшою у 4.7 рази (для кроку чисельного інтегрування 0.0002 с), а точність і стабільність розрахунку зберігаються навіть у випадку значного (в 10 раз) збільшення кроку (подальше збільшення кроку є недоцільним з огляду на втрату інформацію про характер струмів і напруг).

Верифікація розробленої моделі проведена для генераторного режиму роботи шляхом порівняння результатів моделювання з результатами аналітичних розрахунків для усталеного режиму з різним характером навантаження, а також для перехідних режимів - шляхом співставлення результатів моделювання з використанням розробленої моделі та з використанням типової моделі з середовища Matlab/Simulink. Отримані результати верифікації підтверджують адекватність моделі.

Завдяки високій швидкодії розрахунку і необхідній повноті опису СМІМ у фазних координатах розроблена модель може бути використана для аналізу процесів в багатомашинних електромеханічних та електроенергетичних системах та для синтезу систем керування. Висока швидкодія розрахунку та числова стійкість дає можливість роботи моделі в реальному масштабі часу для тестування синтезованих систем керування з застосуванням технології Hardware-in-the-Loop.

Список використаних джерел

1. Elsherbiny, H.; Szamel, L.; Ahmed, M.K.; Elwany, M.A. High Accuracy Modeling of Permanent Magnet Synchronous Motors Using Finite Element Analysis. *Mathematics* 2022, 10, 3880. <https://doi.org/10.3390/math10203880>.
2. Yuan M, Meng Y, Qi X, Li X, Zhang N (2025) Research on simulation of permanent magnet synchronous motor in full speed range. *PLoS One* 20(4): e0320786. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0320786>.
3. H. May, R. Paáka, P. Paplicki, S. Szkolny, and W.-R. Canders, "Modified concept of permanent magnet excited synchronous machines with improved high-speed features", *Arch. Electr. Eng.*, Jan. 2011, vol. 60, no. 4, pp. 531–540.
4. Szalay, I.; Fodor, D.; Enisz, K.; Medve, H. Permanent Magnet Synchronous Motor Model Extension for High-Frequency Signal Injection-Based Sensorless Magnet Polarity Detection. *Energies* 2022, 15, 1131. <https://doi.org/10.3390/en15031131>
5. R. Cousseau, R. Romary, R. Pusca and E. Semail, "Two-Slot Coil Pitch For Five-Phase Integrated Permanent Magnet Synchronous Machine," 2020 International Conference on Electrical Machines (ICEM), Gothenburg, Sweden, 2020, pp. 1615-1620, doi: 10.1109/ICEM49940.2020.9271037.
6. B. Sen and J. Wang, "Stationary Frame Fault-Tolerant Current Control of Polyphase Permanent-Magnet Machines Under," vol. 31, no. 7, 2016, pp.4684–4696.
7. Kutsyk, A.; Semeniuk, M.; Korkosz, M.; Podskarbi, G. Diagnosis of the Static Excitation Systems of Synchronous Generators with the Use of Hardware-In-the-Loop Technologies. *Energies* 2021, 14, 6937. <https://doi.org/10.3390/en14216937>
8. Naama, Fatima & Zegaoui, Abdallah & Benyssaad, Yssaad & Kessaissia, Fatma & Abdelkader, Djahbar & Aillerie, M.. (2019). Model and Simulation of a Wind Turbine and its Associated Permanent Magnet Synchronous Generator. *Energy Procedia*. 157. 737-745. 10.1016/j.egypro.2018.11.239.
9. Lee, Sung-Won & Chun, Kwan-Ho. (2019). Adaptive Sliding Mode Control for PMSG Wind Turbine Systems. *Energies*. 12. 595. 10.3390/en12040595.
10. Louar, F. & Ouari, Ahmed & Omeiri, Amar & Djellad, Abdelhak & Bouras, Lakhdar. (2016). Modeling and control of a permanent magnet synchronous generator dedicated to standalone wind energy conversion system. *Frontiers in Energy*. 10. 10.1007/s11708-016-0410-1.
11. Ion, Catalin & Calin, Marius & Peter, Ioan. (2023). Design of a 3 kW СМІМ with Super Premium Efficiency. *Energies*. 16. 498. 10.3390/en16010498.
12. Tobías, Agustín & Peña, Rafael & Morales-Saldaña, J.A. & Gutierrez-Urueta, Geydy. (2015). Modeling of a Wind Turbine with a Permanent Magnet Synchronous Generator for Real Time Simulations. 10.1109/ROPEC.2015.7395143.
13. Gautam, Kiran & Sankaranarayanan, V.. (2014). Sliding Mode Control of Surface Mounted Permanent Magnet Synchronous Generator. *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*. 3. 1034-1038. 10.3182/20140313-3-IN-3024.00164.
14. К. Горяченко, В. Стецюк, С. Горяченко, та А. Лисий, "Моделювання та випробування синхронних двигунів з постійними магнітами," *Вісник Хмельницького національного університету, серія "Технічні науки"*, 2023, DOI: 10.31891/2307-5732-2023-323-4-112-117.
15. O. Plakhtyna, A. Kutsyk, M. Semeniuk, "Real-Time Models of Electromechanical Power Systems, Based on the Method of Average Voltages in Integration Step and Their Computer Application",. *Energies*, Vol.13, 2263, 2020. <https://doi.org/10.3390/en13092263>
16. Куцук А.С., Семенюк М.Б., Йовбак В.Д. Застосування методу середньокрокових напруг для математичного моделювання електромеханічних систем з синхронною машиною. *Вісник НУ «Львівська політехніка» «Електроенергетичні та електромеханічні системи»*, №671, 2010, с. 45-50.

17. L. Romeral, J. C. Urresty, J. -R. Riba Ruiz and A. Garcia Espinosa, "Modeling of Surface-Mounted Permanent Magnet Synchronous Motors With Stator Winding Interturn Faults," in IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 58, no. 5, pp. 1576-1585, May 2011, doi: 10.1109/TIE.2010.2062480.
18. S. Alves de Souza and W. Issamu Suemitsu, "Five-Phase Permanent-Magnet Synchronous Motor," in IEEE Latin America Transactions, vol. 15, no. 4, pp. 639-645, April 2017, doi: 10.1109/TLA.2017.7896349.
19. Ezeonye, Chinonso & Osuji, Uzoma & Oputa, Osita & Obi, Patrick. (2025). Linearised Model of Surface-Mounted Permanent Magnet Synchronous Motor for Stability and Speed Enhancement. 5. 2295-2307. 10.5281/zenodo.15455620.
20. O. Plakhtyna, A. Kutsyk, M. Semeniuk and O. Kuznyetsov, "Object-oriented program environment for electromechanical systems analysis based on the method of average voltages on integration step," 2017 18th International Conference on Computational Problems of Electrical Engineering (CPEE), Kutna Hora, 2017, pp. 1-4.

A. S. Kutsyk

Lviv Polytechnic National University,
Department of Electromechatronics and Computerized Electromechanical Systems,
andrii.s.kutsyk@lpnu.ua,

A.S.Lishchuk

Lviv Polytechnic National University,
Department of Electromechatronics and Computerized Electromechanical Systems,,
andrii.s.lishchuk@lpnu.ua.

MATHEMATICAL MODEL OF A SYNCHRONOUS MACHINE WITH PERMANENT MAGNETS BASED ON THE METHOD OF AVERAGE VOLTAGES IN THE INTEGRATION STEP

© A.S. Kutsyk, A.S. Lishchuk, 2025

Synchronous machines with permanent magnets (SMPM) have become widely used in modern electric drives and generator sets due to their combination of high energy efficiency, compact size and reliability. They are characterised by increased specific power, no losses in excitation circuits and reduced energy consumption. At the same time, the fixed magnetic flux created by permanent magnets imposes specific requirements on mathematical modelling, especially when developing control algorithms and researching operating modes.

Models in phase or orthogonal coordinates are traditionally used to analyse such machines. Simplified models in rectangular coordinates allow for quick calculations, but they are unable to reflect the behaviour of the machine in asymmetrical modes, different winding connection schemes, or in multiphase configurations. This significantly reduces their suitability in complex energy and electromechanical systems.

This paper presents a mathematical model of a synchronous machine with surface-mounted permanent magnets, implemented in phase coordinates. The model was constructed using the method of average voltages in the integration step, which ensures high numerical stability of calculations and increases the numerical integration step, allowing for faster calculations. The proposed approach expands the possibilities of analysis: it allows considering not only symmetric but also asymmetric modes, as well as implementing various load connection schemes.

A comprehensive verification of the proposed model was carried out: on the one hand, by comparing the results of mathematical modelling for generator operation mode with analytical calculations of the external static characteristics of a synchronous machine with permanent magnets, and on the other hand, using a similar model implemented in the Matlab/Simulink environment to study the behaviour of the machine in transient modes. The results obtained confirmed the adequacy of the proposed model for both steady-state and dynamic modes of operation.

Keywords: *synchronous machine with surface-mounted permanent magnets, mathematical model, method of average voltages in the integration step*