

А. С. Куцук

Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра електромехатроніки та комп’ютеризованих електромеханічних систем,
e-mail: andrii.s.kutsyk@lpnu.ua,

А. С. Ліщук

Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра електромехатроніки та комп’ютеризованих електромеханічних систем,
e-mail: andrii.s.lishchuk@lpnu.ua.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ СИНХРОННОЇ МАШИНИ З ПОСТІЙНИМИ МАГНІТАМИ НА ОСНОВІ МЕТОДУ СЕРЕДНІХ НАПРУГ НА КРОЦІ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ

<https://doi.org/10.23939/sepes2025.01.039>

© Куцук А. С., Ліщук А. С., 2025

Синхронні машини із постійними магнітами (СМПМ) набули поширення в сучасних електроприводах та генераторних установках завдяки поєднанню високої енергоефективності, компактних габаритів і надійності. Вони характеризуються підвищеною питомою потужністю, відсутністю втрат у збуджувальних колах та зменшеним енергоспоживанням. Водночас фіксований магнітний потік, створюваний постійними магнітами, зумовлює специфічні вимоги до математичного моделювання, особливо під час розроблення алгоритмів керування та дослідження робочих режимів.

Для аналізу таких машин традиційно застосовують моделі у фазних, або ортогональних координатах. Спрощені моделі у прямокутних координатах дають змогу швидко виконувати обчислення, проте не здатні відобразити поведінку машини в несиметричних режимах, різних схемах з’єднання обмоток чи у багатофазних конфігураціях. Це істотно знижує їхню придатність у складних енергетичних і електромеханічних системах.

У роботі запропоновано математичну модель синхронної машини з поверхневим розміщенням постійних магнітів, реалізовану в фазних координатах. Під час побудови моделі застосовано метод середніх напруг на кроці числового інтегрування, що забезпечує високу числову стійкість розрахунків та підвищення кроку числового інтегрування і дає змогу збільшити швидкодію обчислень. Запропонований підхід розширює можливості аналізу: дає можливість розглядати не лише симетричні, а й несиметричні режими, а також реалізовувати різні схеми під’єднання навантаження.

Здійснено комплексну верифікацію запропонованої моделі: з одного боку, на підставі порівняння результатів математичного моделювання генераторного режиму роботи з аналітичними розрахунками зовнішніх статичних характеристик синхронної машини із постійними магнітами, а з іншого – за допомогою аналогічної моделі, реалізованої в середовищі MATLAB / Simulink, для дослідження поведінки машини в

перехідних режимах. Отримані результати підтвердили адекватність запропонованої моделі як для усталених, так і для динамічних режимів роботи.

Ключові слова: синхронна машина з поверхневим розміщенням постійних магнітів, математична модель, метод середніх напруг на кроці інтегрування.

Вступ. Аналіз останніх досліджень

Проблематика математичного моделювання синхронних машин з постійними магнітами (СМПМ) сьогодні залишається одним із ключових напрямів розвитку електромеханіки та електроприводів. Вибір адекватної моделі визначає не лише точність відтворення електромагнітних процесів, а й ефективність побудови систем керування, діагностики та інтеграції із відновлюваними джерелами енергії. Сучасні дослідження концентруються на двох протилежних, але взаємодоповнюваних завданнях: з одного боку – на підвищенні точності математичних моделей через урахування складних нелінійних ефектів, з іншого – на створенні обчислювально ефективних спрощених моделей, придатних для роботи у реальному часі.

У роботі [1] описано високоточне моделювання СМПМ із використанням методу кінцевих елементів (FEM). Такий підхід дає змогу врахувати насичення магнітопроводу, розподіл поля у повітряному проміжку та гармонічні складові магнітного потоку. Однак головним обмеженням є висока обчислювальна складність, що робить моделі, побудовані на основі методу скінченних елементів, малопридатними для інтеграції у системи керування в реальному часі. Подібні висновки підтверджують і новіші дослідження [2], де розглянуто симуляцію СМПМ в усьому діапазоні швидкостей, зокрема із режимами послаблення потоку. Це особливо актуально для електроприводів транспортних систем, для яких робота машини в широкому спектрі навантажень є стандартною вимогою.

Важливо також звертати увагу на конструктивні удосконалення. У праці [3] автори пропонують модифікації магнітної системи синхронних машин, що дають змогу підвищити ефективність на високих швидкостях. А у статті [4] розроблено модель СМПМ, адаптовану до методів високочастотної інжекції сигналу, що забезпечує надійне бездавачеве визначення полярності магнітів. Це особливо актуально для машин із поверхневим розташуванням магнітів, у яких відмінність між індуктивностями по осях d та q практично відсутня і традиційні методи визначення положення ротора працюють нестабільно.

Активно розвиваються і дослідження багатофазних СМПМ. У роботах [5, 18] розглянуто побудову п'ятифазних систем, що підвищує відмовостійкість і зменшує амплітуду вищих гармонічних складових у моменті. Публікації [6, 17] концентрують увагу на моделюванні несправностей, зокрема міжвиткових замикань у статорних обмотках. Використання таких моделей дає змогу досліджувати поведінку машини в аварійних режимах і розробляти алгоритми діагностики, що надзвичайно важливо для підвищення надійності електроприводів у промислових застосуваннях.

Окрему групу становлять праці, пов'язані із відновлюваною енергетикою. У дослідженнях [8, 10, 12, 13] розглянуто моделі СМПМ у складі вітроенергетичних установок. Тут актуальним є не лише описання динаміки генератора, але і його взаємодія із системами перетворення енергії та алгоритмами керування. Важливо, що у [9] та [13] акцент зроблено на використанні адаптивних методів керування (зокрема ковзного режиму), які потребують математичних моделей із достатнім рівнем адекватності та швидкодії.

У новітніх роботах також простежується акцент на підвищенні енергоефективності. Наприклад, в праці [11] описано проєктування 3 кВт СМПМ класу “Super Premium Efficiency”, що потребувало точних моделей електромагнітних процесів для оптимізації конструкції. Такі дослідження відображають тенденцію до тісного поєднання конструктивних і математичних аспектів під час створення високоефективних електричних машин.

Нарешті, ключовим напрямом є розвиток методів швидкодіючого моделювання [14–16]. Метод середніх напруг на кроці числового інтегрування (СНКІ) дає змогу істотно збільшити швидкодію обчислень завдяки апроксимації миттєвих величин середніми за інтервал інтегрування. Це забезпечує високу числову стійкість навіть у разі використання великих кроків інтегрування, що особливо важливо для тестування із апаратною інтеграцією (Hardware-in-the-Loop, HIL) та побудови моделей у режимі реального часу. Практична цінність методу підтверджується роботами [15, 16], де цей метод застосовано для математичного моделювання синхронної машини із електромагнітним збудженням (СМ). У статті [19] додатково наголошено на можливості використання лінеаризованих моделей СМПМ для аналізу стійкості та покращення динаміки під час керування швидкістю.

Отже, аналіз літературних джерел показує, що актуальним є питання розроблення обчислювально ефективних підходів до моделювання СМПМ. Одним із таких підходів є застосування методу середніх напруг на кроці числового інтегрування, який поєднує високу швидкодію, числову стійкість та достатню точність опису процесів у машині.

Об'єкт дослідження

Об'єктом дослідження є математичне моделювання синхронної машини із постійними магнітами, у якій формування магнітного потоку здійснюється за рахунок постійних магнітів, розміщених на зовнішній поверхні ротора (неявнополюсна машина).

Математична модель синхронної машини із поверхневим розміщенням постійних магнітів

Математичну модель синхронної машини з постійними магнітами сформовано із застосуванням методу середніх напруг на кроці числового інтегрування. Як показано у низці досліджень [7, 15, 16], використання цього методу забезпечує високу стійкість обчислень та швидкодію моделювання у фазних координатах, що робить його зручним для аналізу динамічних режимів. На відміну від описаних у зазначених роботах моделей синхронних машин з електромагнітним збудженням, у цій роботі розглянуто машину, в якій основний магнітний потік формується за рахунок постійних магнітів ротора.

Для побудови математичної моделі використано типові допущення, зокрема, розподіл магнітного потоку в повітряному проміжку вважався синусоїдним (не враховувався вплив вищих просторових гармонік), не враховували втрати в сталі, демпферні контури ротора, вплив яких у синхронній машині із постійними магнітами незначний.

Подамо кожну фазу статора СМ у вигляді електричної вітки, як показано на рис. 1.

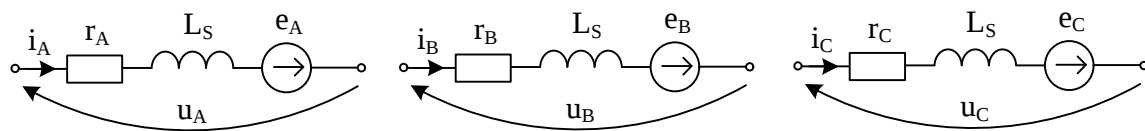


Рис. 1. Електричні вітки статора СМ

де L_S – індуктивність розсіювання.

ЕРС фаз статора СМПМ визначають як

$$\begin{aligned} e_A &= \frac{dy_A}{dt} = \frac{z_p w_R}{\sqrt{3}} (y_C - y_B), \\ e_B &= \frac{dy_B}{dt} = \frac{z_p w_R}{\sqrt{3}} (y_A - y_C), \end{aligned} \quad (1)$$

$$e_C = \frac{dy_C}{dt} = \frac{z_p W_R}{\sqrt{3}} (y_B - y_A),$$

де W_R – кутова швидкість; z_p – кількість пар полюсів.

Потокозчеплення фаз статора в рівнянні (1) дорівнюватимуть:

$$y_A = L_{ad} i_A + y_{fA}, \quad y_B = L_{ad} i_B + y_{fB}, \quad y_C = L_{ad} i_C + y_{fC}, \quad (2)$$

де y_{fA} , y_{fB} , y_{fC} – проєкції потокозчеплення від постійних магнітів на осі обмотки статора, що визначають як:

$$y_{fA} = y_f \cos(g), \quad y_{fB} = y_f \cos(g - r), \quad y_{fC} = y_f \cos(g + r), \quad (3)$$

де $r = 2\pi/3$, y_f – модуль потокозчеплення від постійних магнітів; g – кут повороту ротора, похідну якого визначають так $dg/dt = z_p W_R$.

Струми обмоток статора та ротора визначають з диференціальних рівнянь, які описують електричну схему вітки (рис. 1):

$$\frac{di_A}{dt} = \frac{u_A + e_A - r_A i_A}{L_S}, \quad \frac{di_B}{dt} = \frac{u_B + e_B - r_B i_B}{L_S}, \quad \frac{di_C}{dt} = \frac{u_C + e_C - r_C i_C}{L_S}, \quad (4)$$

Електромагнітний момент СМПМ дорівнюватиме:

$$M_{SM} = \frac{z_p}{2} (y_A (i_C - i_B) + y_B (i_A - i_C) + y_C (i_B - i_A)). \quad (5)$$

Швидкість обертання СМПМ визначається з рівняння

$$\frac{dW_R}{dt} = \frac{M_{SM} + M_e}{J}, \quad (6)$$

де M_e – зовнішній момент на валу; J – сумарний момент інерції, приведений до вала СМПМ.

Для алгебраїзації рівнянь синхронної машини використаємо метод середніх напруг на кроці числового інтегрування (СНКІ) [15]. Із застосуванням цього методу в роботі [15] отримано рівняння для вітки, де невідомими є струм вітки у кінці кроку інтегрування i_1 та середня на кроці напруга вітки U :

$$\begin{aligned} U + E - u_{R0} - u_{C0} + \frac{\Re R}{\zeta m+1} + \frac{Dt}{C} \times \frac{2 - (m+1)(m+2)}{2(m+1)(m+2)} + \frac{L_0}{Dt} \frac{\ddot{i}_0}{\vartheta} - \\ - \frac{m-1}{\zeta} \frac{\Re R}{\zeta(k+1)!} \times \frac{m-k}{m+1} + \frac{Dt^{k+1}}{C(k+2)!} \times \frac{(m+1)(m+2) - (k+1)(k+2)}{(m+1)(m+2)} \frac{\ddot{d}^{(k)} i_0}{\vartheta dt^{(k)}} - \\ - \frac{\Re R}{\zeta m+1} + \frac{Dt}{C(m+1)(m+2)} + \frac{L_1}{Dt} \frac{\ddot{i}_1}{\vartheta} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

де i_0 – струм вітки на початку кроку інтегрування; L_0 , L_1 – індуктивність вітки на початку та в кінці кроку, m – порядок полінома, яким описується крива струму на кроці інтегрування (порядок методу); Dt – крок числового інтегрування.

Згідно із методом середніх напруг на кроці інтегрування другого порядку електрична вітка, що містить активний опір R , індуктивність L та ЕРС, описується таким рівнянням

$$U + E - Ri_0 + \frac{\Re R}{\zeta 3} + \frac{L_0}{Dt} \frac{\ddot{i}_0}{\vartheta} - \frac{R Dt}{6} \frac{di_0}{dt} - \frac{\Re R}{\zeta 3} + \frac{L_1}{Dt} \frac{\ddot{i}_1}{\vartheta} = 0 \quad (8)$$

Застосувавши рівняння (8) до розрахункової схеми синхронної машини з постійними магнітами (рис. 1), отримаємо такі рівняння (індекс 0 відповідає значенню змінної на початку кроку, індекс 1 – у кінці кроку):

$$\begin{aligned} i_{A1} &= \frac{\mathfrak{A}_A}{\mathfrak{C}3} + \frac{L_S}{Dt} \frac{\ddot{\theta}^{-1}}{\ddot{\theta}} \cdot \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} U_A + E_A - r_A i_{A0} + \frac{\mathfrak{A}_A}{\mathfrak{C}3} + \frac{L_S}{Dt} \frac{\ddot{\theta}}{\ddot{\theta}^{-1} j_{A0}} - \frac{r_A Dt}{6} \frac{di_{A0}}{dt} \frac{\ddot{\theta}}{\ddot{\theta}^{-1}} \\ i_{B1} &= \frac{\mathfrak{A}_B}{\mathfrak{C}3} + \frac{L_S}{Dt} \frac{\ddot{\theta}^{-1}}{\ddot{\theta}} \cdot \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} U_B + E_B - r_B i_{B0} + \frac{\mathfrak{A}_B}{\mathfrak{C}3} + \frac{L_S}{Dt} \frac{\ddot{\theta}}{\ddot{\theta}^{-1} j_{B0}} - \frac{r_B Dt}{6} \frac{di_{B0}}{dt} \frac{\ddot{\theta}}{\ddot{\theta}^{-1}} \\ i_{C1} &= \frac{\mathfrak{A}_C}{\mathfrak{C}3} + \frac{L_S}{Dt} \frac{\ddot{\theta}^{-1}}{\ddot{\theta}} \cdot \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} U_C + E_C - r_C i_{C0} + \frac{\mathfrak{A}_C}{\mathfrak{C}3} + \frac{L_S}{Dt} \frac{\ddot{\theta}}{\ddot{\theta}^{-1} j_{C0}} - \frac{r_C Dt}{6} \frac{di_{C0}}{dt} \frac{\ddot{\theta}}{\ddot{\theta}^{-1}} \end{aligned} \quad (9)$$

Середні на кроці числового інтегрування значення ЕРС знаходимо так

$$E_A = e_{A0} + \frac{de_A}{dt} \frac{Dt}{2}, \quad E_B = e_{B0} + \frac{de_B}{dt} \frac{Dt}{2}, \quad E_C = e_{C0} + \frac{de_C}{dt} \frac{Dt}{2}. \quad (10)$$

Похідні фазних ЕРС визначимо з рівняння (1):

$$\begin{aligned} \frac{de_A}{dt} &= \frac{z_p w_R}{\sqrt{3}} \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} \frac{dy_C}{dt} - \frac{dy_B}{dt} \frac{\ddot{\theta}}{\ddot{\theta}^{-1}} + \frac{z_p}{\sqrt{3}} \frac{dw_R}{dt} (y_C - y_B), \\ \frac{de_B}{dt} &= \frac{z_p w_R}{\sqrt{3}} \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} \frac{dy_A}{dt} - \frac{dy_C}{dt} \frac{\ddot{\theta}}{\ddot{\theta}^{-1}} + \frac{z_p}{\sqrt{3}} \frac{dw_R}{dt} (y_A - y_C), \\ \frac{de_C}{dt} &= \frac{z_p w_R}{\sqrt{3}} \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} \frac{dy_B}{dt} - \frac{dy_A}{dt} \frac{\ddot{\theta}}{\ddot{\theta}^{-1}} + \frac{z_p}{\sqrt{3}} \frac{dw_R}{dt} (y_B - y_A), \end{aligned} \quad (11)$$

де похідні потокозчеплень статора згідно з (2) дорівнюватимуть:

$$\begin{aligned} \frac{dy_A}{dt} &= L_{ad} \frac{di_A}{dt} + \frac{dy_{fA}}{dt} = L_{ad} \frac{di_A}{dt} - z_p w_R \sin(g), \\ \frac{dy_B}{dt} &= L_{ad} \frac{di_B}{dt} + \frac{dy_{fB}}{dt} = L_{ad} \frac{di_B}{dt} - z_p w_R \sin(g - r), \\ \frac{dy_C}{dt} &= L_{ad} \frac{di_C}{dt} + \frac{dy_{fC}}{dt} = L_{ad} \frac{di_C}{dt} - z_p w_R \sin(g + r). \end{aligned} \quad (12)$$

Алгоритм розв'язування рівнянь математичної моделі на кроці числового інтегрування такий:

1. За формулами (3) визначаємо проекції потокозчеплення від постійних магнітів на осі обмотки статора; за формулами (2), на основі значень струмів статора і потокозчеплення від постійних магнітів на початку кроку визначаємо потокозчеплення фаз статора y_A , y_B , y_C ; за формулами (1) обчислюємо ЕРС фаз статора e_A , e_B , e_C .

2. За формулами (4) визначаємо похідні струмів статора.

3. За формулою (5) знаходимо електромагнітний момент СМПМ.

4. За формулою (6) обчислюємо похідну швидкості СМПМ.

5. За формулами (12) визначаємо похідні потокозчеплень статора.

6. За формулами (11) обчислюємо похідні ЕРС статора.

7. За формулами (10) визначаємо середні на кроці інтегрування значення ЕРС фаз статора E_A , E_B , E_C .

8. За формулами (9) визначаємо струми статора i_{A1} , i_{B1} , i_{C1} у кінці кроку інтегрування.

Вхідною інформацією для розрахунку є: напруги, прикладені до фаз статора, значення змінних на початку кроку, електромагнітні параметри, зовнішній момент на валу СМІМ.

Верифікація математичної моделі синхронної машини із постійними магнітами

Верифікацію математичної моделі синхронної машини із постійними магнітами здійснено для параметрів синхронної машини із поверхневим розміщенням магнітів, наведених у [19]. Параметри синхронної машини наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Параметри синхронної машини із поверхневим розміщенням магнітів (СМІМ)

Параметр машини	Значення
Номінальна потужність, P	2 кВт
Номінальна напруга, V	240 В
Номінальна швидкість, ω	1500 об./хв
Індуктивність по осі d та осі q , L_d та L_q	0,0171 Гн
Потік від постійних магнітів, λ_{af}	0,321 Вб
Кількість пар полюсів, z_p	2
Опір обмотки статора, r_s	0,35 Ом
Частота, f	50 Гц

Для підтвердження адекватності створеної математичної моделі виконано розрахунок статичних зовнішніх характеристик – залежність вихідної напруги від струму для різного навантаження. Результати моделювання порівнювали із аналітичними розрахунками зовнішніх характеристик на основі заступної схеми фази синхронної машини із постійними магнітами, наведеної на рис. 2.

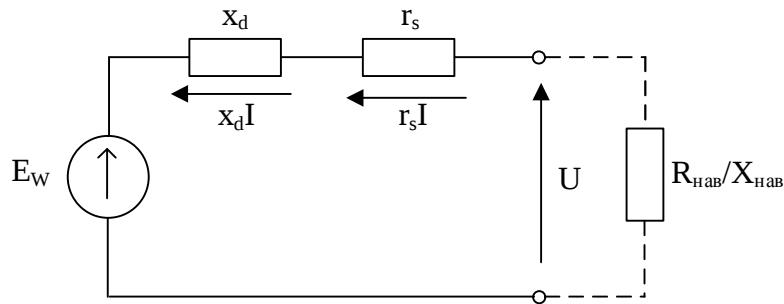


Рис. 2. Заступна схема фази синхронної машини з постійними магнітами

Аналітичний розрахунок зовнішніх характеристик виконано на основі векторних діаграм, побудованих для такої схеми заміщення (рис. 2) для двох граничних випадків навантаження – активного (рис. 3, а) та індуктивного (рис. 3, б).

На основі векторних діаграм, зображених на рис. 3 (а, б), можна записати вирази для внутрішньої ЕРС E_w у випадку:

- активного навантаження:

$$E_w = \sqrt{(U + r_s I)^2 + (x_d I)^2} . \quad (13)$$

- індуктивного навантаження:

$$E_w = \sqrt{(U + x_d I)^2 + (r_s I)^2} . \quad (14)$$

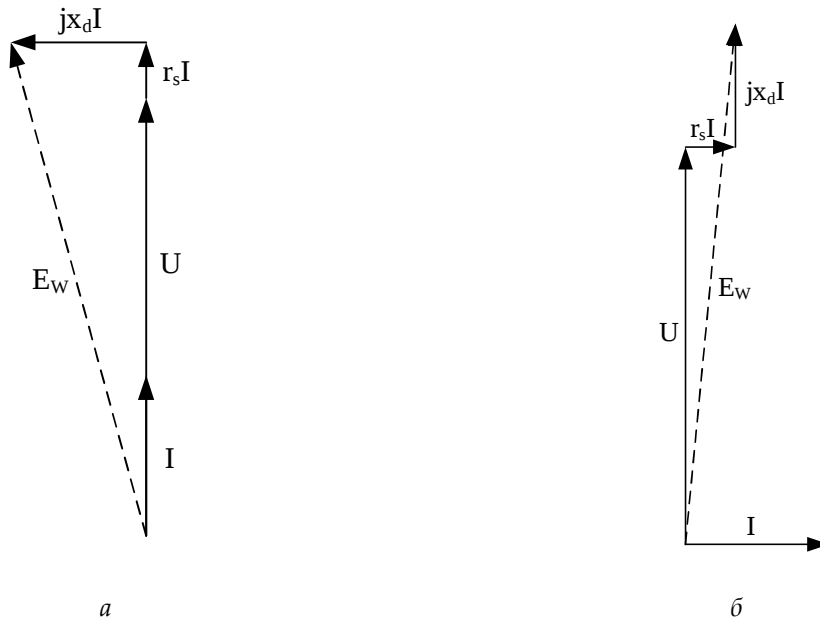


Рис. 3. Векторні діаграми для граничних режимів навантаження:
а – активне, б – індуктивне навантаження

На основі виразів (13) та (14) виведено рівняння для знаходження вихідної напруги синхронної машини:

$$U_{\text{акт.н}} = \sqrt{E_w^2 - (x_d I)^2} - (r_s I). \quad (15)$$

$$U_{\text{інд.н}} = \sqrt{E_w^2 - (r_s I)^2} - (x_d I). \quad (16)$$

Для розрахунку статичних характеристик швидкість обертання ротора задавали сталою – $\omega = 157,07$ рад/с, що відповідає синхронній частоті 50 Гц.

Модуль ЕРС СМ визначено за відомим співвідношенням:

$$E_w = I_{af} z_p \times 2p f = 0,321 \times 2 \times 2 \times \pi \times 50 = 201,69 \text{ В}.$$

Результати верифікації математичної моделі синхронної машини для статичних зовнішніх характеристик зведено в табл. 2 та 3, де подано амплітудні значення фазного струму машини I , фазної напруги, визначеної в результаті моделювання $U_{\text{мод.}}$, та аналітично розрахованої амплітуди напруги $U_{\text{аналіт.}}$, обчисленої за виразами (15) та (16) відповідно для активного й індуктивного навантаження. Додатково в таблицях наведено відносну похибку ΔU , %, яка характеризує відхилення результатів моделювання від аналітичних значень. Це дає змогу кількісно оцінити адекватність математичної моделі та визначити рівень її точності для усталеного режиму роботи.

Таблиця 2

**Порівняння результатів математичного моделювання та аналітичних розрахунків
для активного навантаження ($\omega = \text{const}$, $E_w = \text{const}$)**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I , А	11,1038	10,0427	9,16065	8,77366	7,49832	6,1124	5,18089	3,4298	2,66954	0,682701
$U_{\text{мод.}}$, В	188,77	190,811	192,374	193,021	194,987	196,845	197,986	199,69	200,29	201,397
$U_{\text{аналіт.}}$, В	188,726	190,781	192,351	193,001	194,978	196,844	197,936	199,641	200,242	201,4175
ΔU , %	0,02082	0,01542	0,01168	0,01014	0,00460	0,00059	0,02539	0,02442	0,02388	0,010184

Порівняння результатів математичного моделювання та аналітичних розрахунків для індуктивного навантаження ($\omega = \text{const}$, $E_w = \text{const}$)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I , А	11,654	10,5093	9,29247	8,5501	7,54567	6,68059	5,53151	3,67605	2,02624	0,44689
$U_{\text{мод.}}$, В	139,004	145,16	151,704	155,697	161,105	165,759	171,98	181,767	190,78	199,333
$U_{\text{аналіт.}}$, В	138,859	145,034	151,597	155,601	161,018	165,682	171,878	181,880	190,772	199,2822
ΔU , %	0,10434	0,08672	0,07019	0,06146	0,05406	0,04612	0,05939	0,06214	0,00434	0,025499

Результати свідчать про високий збіг результатів моделювання та аналітичних розрахунків і про адекватність розробленої моделі в зазначених режимах.

Графіки миттєвих значень фазних струмів та напруг синхронної машини, отримані за допомогою математичного моделювання у випадку суто активного навантаження в усталеному режимі, подано на рис. 4.

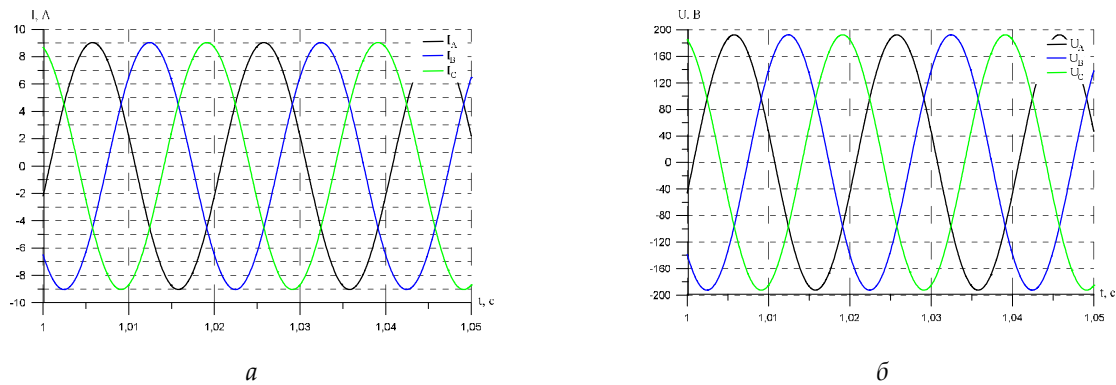


Рис. 4. Результати моделювання усталеного режиму для активного навантаження:
а – фазні струми, б – фазні напруги

Наступним етапом дослідження був аналіз динамічних режимів роботи синхронної машини з постійними магнітами, зокрема перехідних процесів у разі зміни навантаження та швидкості. Для підтвердження адекватності розробленої математичної моделі в динамічних режимах здійснено порівняння отриманих динамічних характеристик із результатами моделювання у середовищі MATLAB / Simulink із використанням стандартного блока моделі СМІМ у поєднанні з блоком навантаження, що дає змогу відтворити характерні режими роботи машини.

На рис. 5 подано часові діаграми фазних струмів (рис. 5, а, б), фазних напруг (рис. 5, в, г), електромагнітного моменту (рис. 5, д, е), електричної потужності на виході (рис. 5, є, ж) та швидкості (рис. 5, з, і) у випадку зміни навантаження за сталої швидкості обертання. Зліва (рис. 5, а, в, д, є) наведено результати, отримані за допомогою розробленої математичної моделі, а справа (рис. 5, б, г, е, ж) – результати моделювання у середовищі MATLAB / Simulink, що дає змогу здійснити порівняння та оцінити адекватність моделі.

У момент $t = 0,5$ с накид навантаження зумовлює зростання амплітуди фазних струмів (рис. 5, а, б) та появу незначного просідання напруги (рис. 5, в, г). Із подальшим збільшенням навантаження в інтервалі $t = 1\text{--}1,5$ с струми зростають ще більше, а спад напруги стає виразнішим. Після зменшення навантаження ($t > 1,5$ с) спостерігається відновлення напруги та зменшення амплітуди струмів. Динаміка, отримана у розробленій математичній моделі, добре узгоджується з результатами аналогічного моделювання у середовищі MATLAB / Simulink – форми кривих та їх амплітуди збігаються.

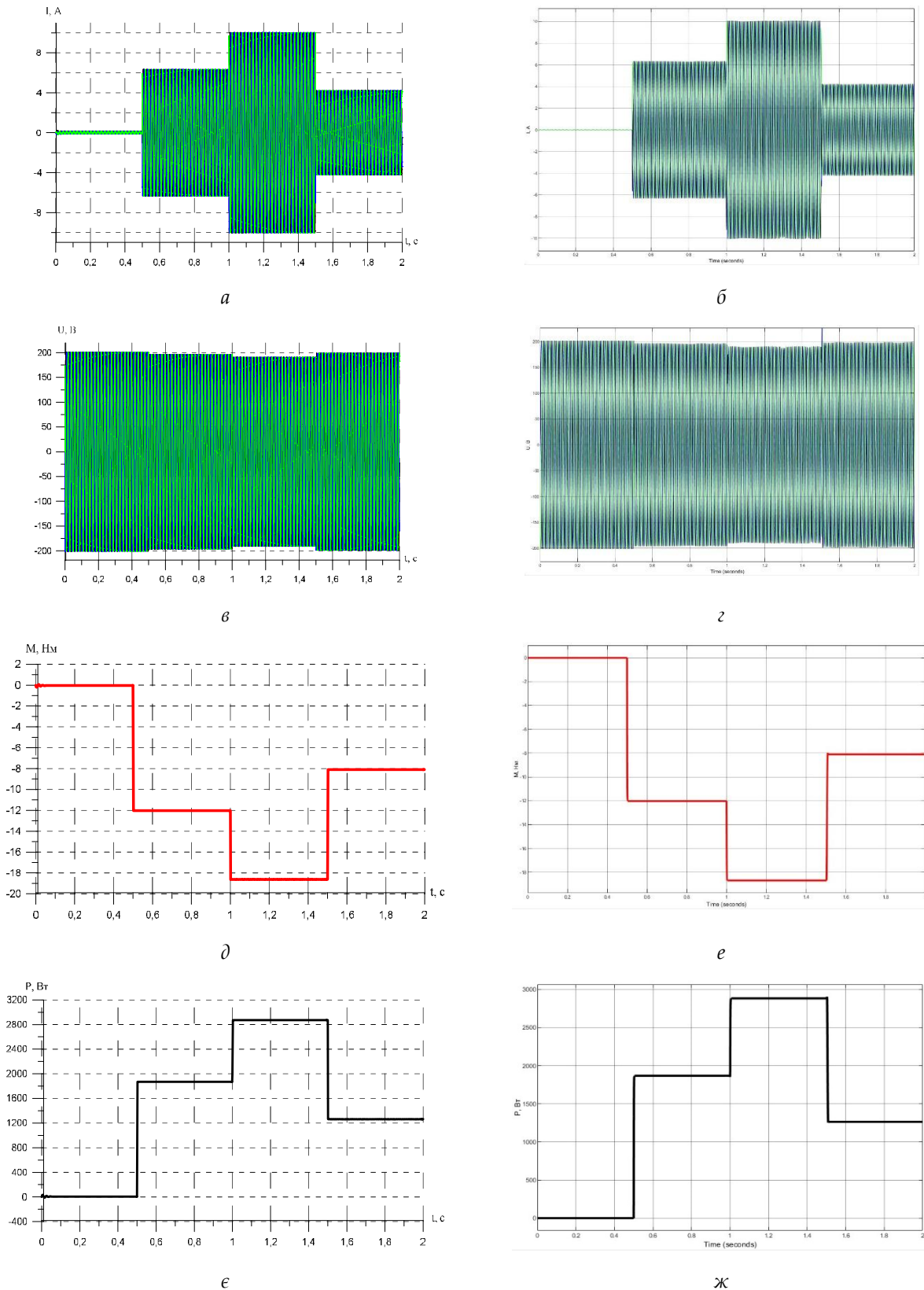


Рис. 5. Зміна навантаження за сталої швидкості обертання: а, б – фазні струми; в, г – фазні напруги; д, е – електромагнітний момент; е, ж – електрична потужність на виході; а, в, д, е – результати, отримані на розробленій математичній моделі; б, г, е, ж – результати моделювання у середовищі **MATLAB / Simulink**

На рис. 6 наведено часові залежності фазних струмів (рис. 6, а, б), фазних напруг (рис. 6, в, г), електромагнітного моменту (рис. 6, д, е), електричної потужності на виході (рис. 6, є, ж) та швидкості (рис. 6, з, і) за умови зміни зовнішнього моменту на валу, який у цьому випадку був вхідним сигналом для моделі (подібно, як і в типовій моделі СМПМ в середовищі MATLAB / Simulink). У момент часу $t = 0,5$ с зовнішній момент на валу стрибкоподібно збільшувався до 12 Нм, а в момент часу 1 с плавно зменшувався до 6 Нм. Порівняння результатів, отриманих за допомогою розробленої математичної моделі та моделі у середовищі MATLAB / Simulink, показує їх повну ідентичність у перехідних і усталених режимах.

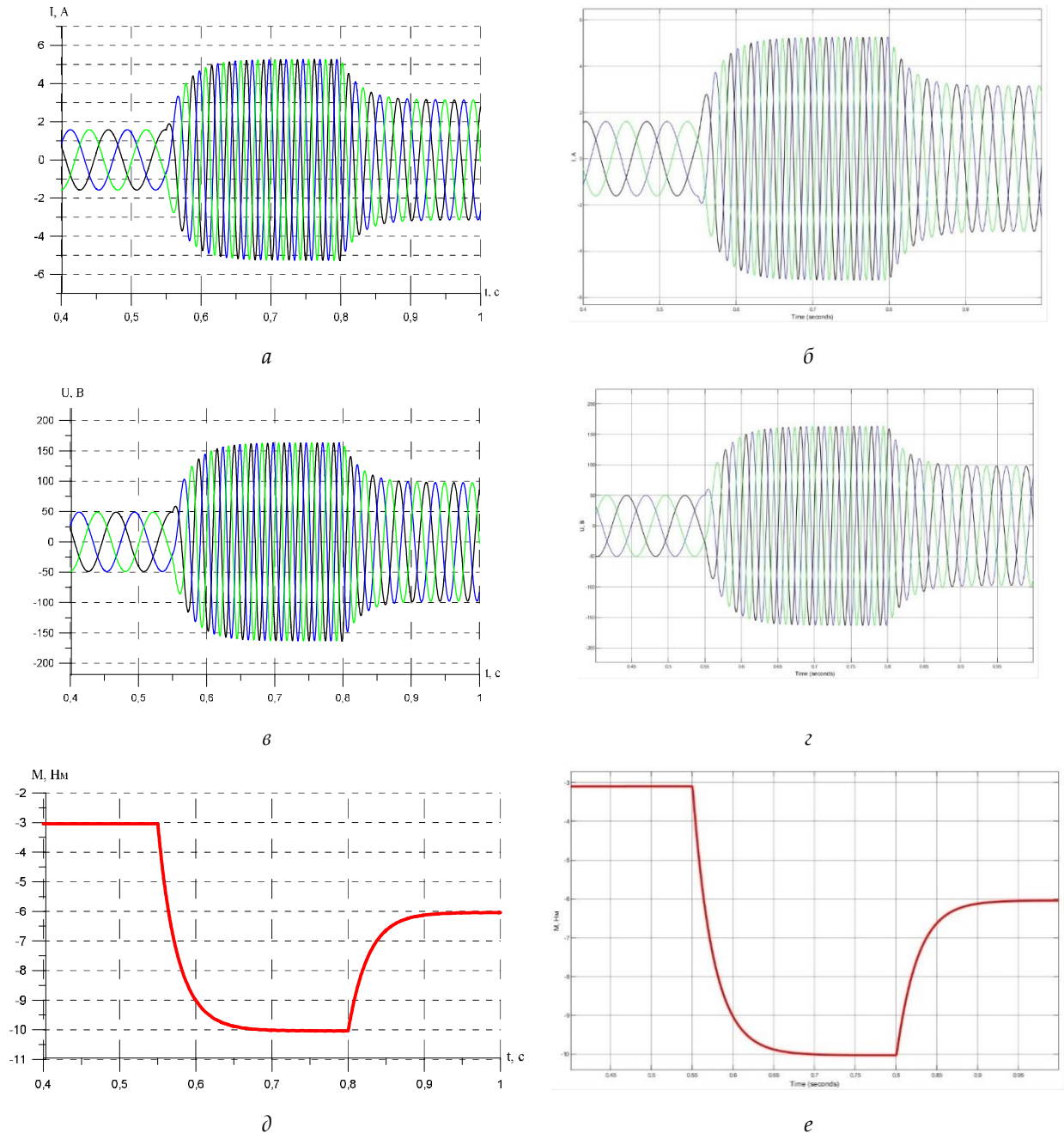


Рис. 6. Перехідні процеси у випадку зміни зовнішнього моменту на валу СМПМ : а, б – фазні струми; в, г – фазні напруги; д, е – електромагнітний момент; а, в, д, є, з – результати, отримані на розробленій математичній моделі; б, г, е, ж, і – результати моделювання у середовищі **MATLAB / Simulink**

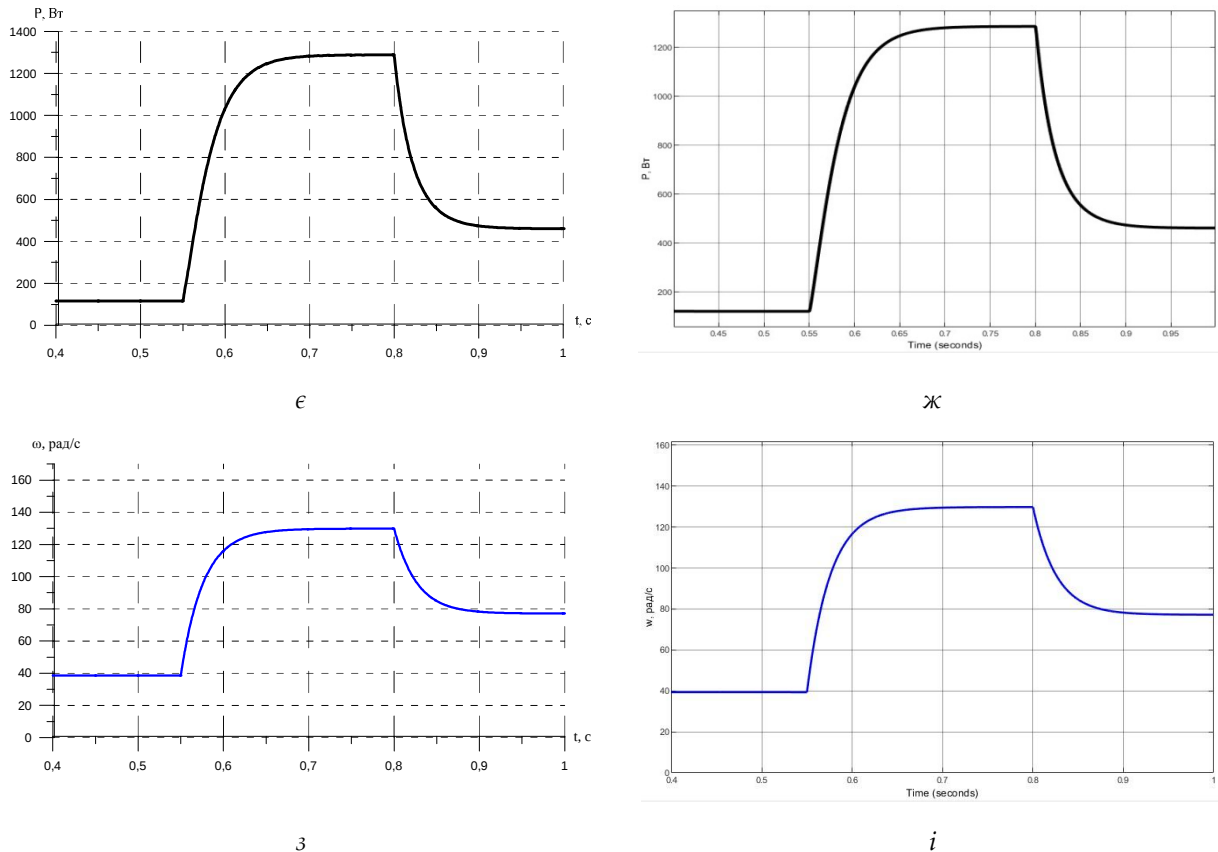


Рис. 6. (Продовження). Перехідні процеси у випадку зміни зовнішнього моменту на валу СМПМ : **є, ж** – електрична потужність на виході; **з, і** – швидкість; **а, в, д, є, з** – результати, отримані на розробленій математичній моделі; **б, г, е, ж, і** – результати моделювання у середовищі **MATLAB / Simulink**

Для порівняння швидкодії розрахунку виконано розрахунок часового інтервалу тривалістю 60 с за допомогою розробленої моделі, реалізованої програмно мовою C++ (для програмної реалізації розробленої моделі використано об'єктно-орієнтований метод та програмне середовище, описані в [15, 20]) та за допомогою типової моделі у середовищі MATLAB / Simulink. Тривалість розрахунку із кроком числового інтегрування 0,0002 с для розробленої моделі становила 2,7 с, тоді як для моделі в середовищі MATLAB / Simulink і аналогічного кроку – 12,7 с (з використанням методу числового інтегрування ode1be (backward Euler), що дав найкращий результат, порівняно із іншими методами). Зазначимо, що навіть десятикратне збільшення кроку (до 0,002 с) в розробленій моделі не вплинуло на стабільність і точність обчислень, що свідчить про високу числову стійкість. Значне збільшення кроку, однак, призводить до втрати інформації щодо форми кривих синусоїдних струмів і напруг.

Висновки

Застосування методу середніх напруг на кроці числового інтегрування дало змогу створити математичну модель синхронної машини із постійними магнітами у фазних координатах, яка вирізняється високою швидкістю і числовою стійкістю, тобто здатністю виконувати обчислення зі збільшеним кроком числового інтегрування, що притаманна використаному методу. Порівняно з типовою моделлю у середовищі MATLAB / Simulink швидкість розробленої моделі у 4,7 раза більша (для кроку числового інтегрування 0,0002 с), а точність і стабільність розрахунку зберігаються навіть у випадку значного (у десять разів) збільшення кроку (подальше збільшення кроку недоцільне з огляду на втрату інформацію про характер струмів і напруг).

Верифікацію розробленої моделі здійснено для генераторного режиму роботи на підставі порівняння результатів моделювання із результатами аналітичних розрахунків для усталеного режиму із різним навантаженням, а також для перехідних режимів – зіставленням результатів моделювання з використанням розробленої моделі та типової моделі із середовища MATLAB / Simulink. Отримані результати верифікації підтверджують адекватність моделі.

Завдяки високій швидкодії розрахунку і необхідній повноті описання СМІМ у фазних координатах розроблену модель можна використовувати для аналізу процесів у багатомашинних електромеханічних та електроенергетичних системах та для синтезу систем керування. Висока швидкість розрахунку та числова стійкість уможливають роботу моделі в реальному масштабі часу для тестування синтезованих систем керування із застосуванням технології Hardware-in-the-Loop.

Список літератури

1. Elsherbiny, H.; Szamel, L.; Ahmed, M.K.; Elwany, M.A. High Accuracy Modeling of Permanent Magnet Synchronous Motors Using Finite Element Analysis. *Mathematics*, 2022, 10, 3880. <https://doi.org/10.3390/math10203880>.
2. Yuan M, Meng Y, Qi X, Li X, Zhang N (2025) Research on simulation of permanent magnet synchronous motor in full speed range. *PLoS One*, 20(4): e0320786. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0320786>.
3. H. May, R. Paáka, P. Paplicki, S. Szkolny, and W.-R. Canders, “Modified concept of permanent magnet excited synchronous machines with improved high-speed features”, *Arch. Electr. Eng.*, Jan. 2011, Vol. 60, No. 4, pp. 531–540.
4. Szalay, I., Fodor, D., Enisz, K., Medve, H. Permanent Magnet Synchronous Motor Model Extension for High-Frequency Signal Injection-Based Sensorless Magnet Polarity Detection. *Energies*, 2022, 15, 1131. <https://doi.org/10.3390/en15031131>
5. R. Cousseau, R. Romary, R. Pusca and E. Semail, “Two-Slot Coil Pitch For Five-Phase Integrated Permanent Magnet Synchronous Machine”, 2020 International Conference on Electrical Machines (ICEM), Gothenburg, Sweden, 2020, pp. 1615–1620. DOI: 10.1109/ICEM49940.2020.9271037.
6. B. Sen and J. Wang, “Stationary Frame Fault-Tolerant Current Control of Polyphase Permanent-Magnet Machines Under”, Vol. 31, No. 7, 2016, pp. 4684–4696.
7. Kutsyk, A.; Semeniuk, M.; Korkosz, M.; Podskarbi, G. Diagnosis of the Static Excitation Systems of Synchronous Generators with the Use of Hardware-In-the-Loop Technologies. *Energies*, 2021, 14, 6937. <https://doi.org/10.3390/en14216937>
8. Naama, Fatima & Zegaoui, Abdallah & Benyssaad, Yssaad & Kessaissia, Fatma & Abdelkader, Djahbar & Aillerie, M.. (2019). Model and Simulation of a Wind Turbine and its Associated Permanent Magnet Synchronous Generator. *Energy Procedia*, 157, 737–745. 10.1016/j.egypro.2018.11.239.
9. Lee, Sung-Won & Chun, Kwan-Ho (2019). Adaptive Sliding Mode Control for PMSG Wind Turbine Systems. *Energies*, 126 595. 10.3390/en12040595.
10. Louar, F. & Ouari, Ahmed & Omeiri, Amar & Djellad, Abdelhak & Bouras, Lakhdar (2016). Modeling and control of a permanent magnet synchronous generator dedicated to standalone wind energy conversion system. *Frontiers in Energy*, 10. 10.1007/s11708-016-0410-1.
11. Ion, Catalin & Calin, Marius & Peter, Ioan. (2023). Design of a 3 kW СМІМ with Super Premium Efficiency. *Energies*, 16, 498. 10.3390/en16010498.
12. Tobías, Agustín & Peña, Rafael & Morales-Saldaña, J. A. & Gutierrez-Urueta, Geydy. (2015). Modeling of a Wind Turbine with a Permanent Magnet Synchronous Generator for Real Time Simulations. 10.1109/ROPEC.2015.7395143.
13. Gautam, Kiran & Sankaranarayanan, V. (2014). Sliding Mode Control of Surface Mounted Permanent Magnet Synchronous Generator. *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, 3, 1034–1038. 10.3182/20140313-3-IN-3024.00164.
14. К. Горяченко, В. Стецюк, С. Горяченко, та А. Лисий, “Моделювання та випробування синхронних двигунів з постійними магнітами”, *Вісник Хмельницького національного університету, серія “Технічні науки”*, 2023. DOI: 10.31891/2307-5732-2023-323-4-112-117.
15. O. Plakhtyna, A. Kutsyk, M. Semeniuk, “Real-Time Models of Electromechanical Power Systems, Based on the Method of Average Voltages in Integration Step and Their Computer Application”, *Energies*, Vol. 13, 2263, 2020. <https://doi.org/10.3390/en13092263>
16. Куцук А. С., Семенюк М. Б., Йовбак В. Д. Застосування методу середньокрокових напруг для математичного моделювання електромеханічних систем з синхронною машиною. *Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка” “Електроенергетичні та електромеханічні системи”*, № 671, 2010, 45–50.

17. L. Romeral, J. C. Urresty, J. -R. Riba Ruiz and A. Garcia Espinosa, "Modeling of Surface-Mounted Permanent Magnet Synchronous Motors With Stator Winding Interturn Faults", in *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 58, No. 5, pp. 1576–1585, May 2011. DOI: 10.1109/TIE.2010.2062480.
18. S. Alves de Souza and W. Issamu Suemitsu, "Five-Phase Permanent-Magnet Synchronous Motor", in *IEEE Latin America Transactions*, Vol. 15, No. 4, pp. 639–645, April 2017. DOI: 10.1109/TLA.2017.7896349.
19. Ezeonye, Chinonso & Osuji, Uzoma & Oputa, Osita & Obi, Patrick (2025). Linearised Model of Surface-Mounted Permanent Magnet Synchronous Motor for Stability and Speed Enhancement, 5, 2295–2307. 10.5281/zenodo.15455620.
20. O. Plakhtyna, A. Kutsyk, M. Semeniuk and O. Kuznyetsov, "Object-oriented program environment for electromechanical systems analysis based on the method of average voltages on integration step", 2017 18th International Conference on Computational Problems of Electrical Engineering (CPEE), Kutna Hora, 2017, pp. 1–4.

A. S. Kutsyk

Lviv Polytechnic National University,
Department of Electromechatronics and Computerized Electromechanical Systems,
e-mail: andrii.s.kutsyk@lpnu.ua,

A. S. Lishchuk

Lviv Polytechnic National University,
Department of Electromechatronics and Computerized Electromechanical Systems,,
e-mail: andrii.s.lishchuk@lpnu.ua.

MATHEMATICAL MODEL OF A SYNCHRONOUS MACHINE WITH PERMANENT MAGNETS BASED ON THE METHOD OF AVERAGE VOLTAGES IN THE INTEGRATION STEP

© Kutsyk A. S., Lishchuk A. S., 2025

Synchronous machines with permanent magnets (SMPM) have become widely used in modern electric drives and generator sets due to their combination of high energy efficiency, compact size and reliability. They are characterised by increased specific power, no losses in excitation circuits and reduced energy consumption. At the same time, the fixed magnetic flux created by permanent magnets imposes specific requirements on mathematical modelling, especially when developing control algorithms and researching operating modes.

Models in phase or orthogonal coordinates are traditionally used to analyse such machines. Simplified models in rectangular coordinates allow for quick calculations, but they are unable to reflect the behaviour of the machine in asymmetrical modes, different winding connection schemes, or in multiphase configurations. This significantly reduces their suitability in complex energy and electromechanical systems.

This paper presents a mathematical model of a synchronous machine with surface-mounted permanent magnets, implemented in phase coordinates. The model was constructed using the method of average voltages in the integration step, which ensures high numerical stability of calculations and increases the numerical integration step, allowing for faster calculations. The proposed approach expands the possibilities of analysis: it allows considering not only symmetric but also asymmetric modes, as well as implementing various load connection schemes.

A comprehensive verification of the proposed model was carried out: on the one hand, by comparing the results of mathematical modelling for generator operation mode with analytical calculations of the external static characteristics of a synchronous machine with permanent magnets, and on the other hand, using a similar model implemented in the Matlab / Simulink environment to study the behaviour of the machine in transient modes. The results obtained confirmed the adequacy of the proposed model for both steady-state and dynamic modes of operation.

Keywords: *synchronous machine with surface-mounted permanent magnets, mathematical model, method of average voltages in the integration step*