

Станіслав РАДОВ<sup>1</sup>, Сергій РОТТЕ<sup>2</sup>, Максим СОБОЛЄВ<sup>3</sup>, Валентина ЛИТВИН<sup>4</sup>,  
Аліна ВОЛОНТИР<sup>5</sup>

<sup>1</sup> Кафедра геодезії, землеустрою, будівельних конструкцій та безпеки життєдіяльності, Черкаський державний технологічний університет, бульвар Шевченка, 460, Черкаси, 18000, Україна, тел. +380505529147, ел. пошта: s.radov@chdtu.edu.ua; <https://orcid.org/0009-0003-5721-996X>

<sup>2</sup> Кафедра геодезії, землеустрою, будівельних конструкцій та безпеки життєдіяльності, Черкаський державний технологічний університет, бульвар Шевченка, 460, Черкаси, 18000, Україна, тел. +380637906470, ел. пошта: s.rotte@chdtu.edu.ua; <https://orcid.org/0000-0003-1281-1241>

<sup>3</sup> The HALO Trust, вул. Георгія Тарасенко, 57А, Харків, 61000, Україна, тел. +380507697382, ел. пошта: sobolevmaxim@ukr.net

<sup>4</sup> Кафедра геодезії, землеустрою, будівельних конструкцій та безпеки життєдіяльності, Черкаський державний технологічний університет, бульвар Шевченка, 460, Черкаси, 18000, Україна, тел. +380673022165, ел. пошта: litvin\_valyav@ukr.net

<sup>5</sup> Кафедра геодезії, землеустрою, будівельних конструкцій та безпеки життєдіяльності, Черкаський державний технологічний університет, бульвар Шевченка, 460, Черкаси, 18000, Україна, тел. +380987499794, ел. пошта: a.volontyr@chdtu.edu.ua; <https://orcid.org/0000-0001-5609-4569>

<https://doi.org/10.23939/istcgcap2025.101.026>

## ВИСОКОТОЧНИЙ АЛГОРИТМ ПЕРЕТВОРЕННЯ КООРДИНАТ ДЛЯ РІВНОПРОМІЖНОЇ ПОПЕРЕЧНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ПРОЄКЦІЇ

Мета дослідження – розроблення алгоритму прямого й зворотного перетворення геодезичних координат та плоских прямокутних координат рівнопроміжної поперечно-циліндричної проєкції, оснований на використанні геоцентричних координатних еліпсів. *Методика.* Для обґрунтування алгоритму перетворення координат використано загальнонаукові методи абстрагування, аналізу, синтезу та математичного моделювання. *Результати.* Розроблено точний алгоритм рівнопроміжної поперечно-циліндричної проєкції, в якому використано геоцентричні координатні еліпси – осьовий меридіан (еліпс абсцис) та перпендикулярний до нього еліпс ординат. У межах координатної зони положення точки на поверхні еліпсоїда однозначно визначається криволінійними координатами, які обчислюють як дуги відповідних еліпсів від екватора до точки перетину осьового меридіана із ординатним еліпсом та від осьового меридіана до цієї точки. За плоскі прямокутні координати прийнято дуги відповідних координатних еліпсів. Для перетворення координат запропоновано геоцентричні координатні кути в площинах координатних еліпсів, які є функціями геодезичних та прямокутних координат під час прямого та зворотного перетворень. У наведеному алгоритмі плоскі прямокутні координати визначаються з точністю обчислення довжини дуги меридіана і за будь-яких значень геодезичних широт та довгот похибки не перевищують 0,1 мм. Забезпечується також висока точність зворотного перетворення. У роботі наведено формули та приклади обчислення плоских прямокутних координат рівнопроміжної поперечно-циліндричної проєкції за геодезичними координатами, зворотного перетворення, масштабу спотворення та кута зближення меридіанів. *Наукова новизна.* Запропоновано використовувати геоцентричні координатні еліпси для обґрунтування рівнопроміжної поперечно-циліндричної проєкції. *Практична значущість.* Розроблений алгоритм забезпечує субміліметрову точність прямого і зворотного перетворення координат рівнопроміжної поперечно-циліндричної проєкції на будь-яких широтах для координатних зон із різницею довгот до  $\pm 90^\circ$ .

*Ключові слова:* поперечно-циліндрична проєкція, геометричне обґрунтування, геодезичні координати, геоцентричні координатні еліпси, геоцентричні координатні кути, довжина дуги еліпса, плоскі прямокутні координати, перетворення координат, масштаб проєкції, кут зближення меридіанів.

### Вступ

Проектування поверхні земної кулі на площину в поперечній циліндричній проєкції полягає у виборі осьового (центрального) меридіана  $NA'CS$  координатної зони та проведення перпендикулярно до нього великого кола  $EAA'W$  через задану точку  $A$  з широтою  $\varphi$  та довготою  $\lambda$  [Łomnicki, 1927], [Engsager & Poder K.,

2007]. Положення будь-якої точки на поверхні сфери однозначно визначається геоцентричними кутами  $\xi$  та  $\eta$  (рис. 1) за формулами [Deakin, 2010]

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \xi &= \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \Delta \lambda}; \\ \sin \eta &= \cos \varphi \cdot \sin \Delta \lambda \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

або сферичними криволінійними координатами  $X=F_{R,\xi}$  та  $Y=F_{R,\eta}$  – довжинами дуг  $CA'$  та  $A'A$ , які

залежать від радіуса сфери  $R$  та геоцентричних кутів  $\xi, \eta$ .

Приймаючи напрямок на північ за вісь абсцис, отримаємо коло абсцис у вигляді осьового меридіана  $NA'CS$  та коло ординат – перпендикулярне коло  $EAA'W$ .

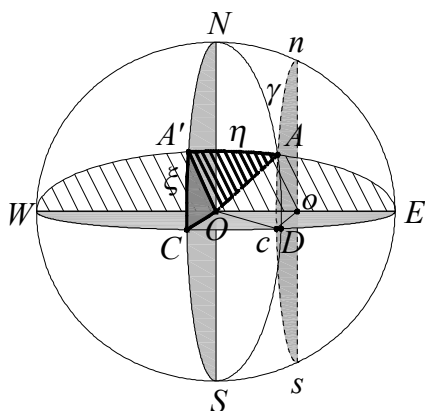


Рис. 1. Схема поперечно-циліндричної проєкції

Вибравши довжини відповідних дуг за плоскі прямокутні координати та трансформуючи ординату, можна отримати [Гудз, 2021], :

– рівнопроміжну проєкцію (наприклад, проєкцію Кассіні – Зольднера), в якій масштаби спотворень за координатними осями становлять  $m_x = \sec \eta$ ,  $m_y = 1$ , а масштаб спотворення площ –  $m_p = \sec \eta$ ,

$$\begin{cases} x = R \cdot \xi; \\ y = R \cdot \eta; \end{cases} \quad (2)$$

– рівнокутну проєкцію (наприклад, проєкцію Гаусса – Ламберта), в якій  $m_x = m_y = \sec \eta$  та  $m_p = \sec^2 \eta$ ,

$$\begin{cases} x = R \cdot \xi; \\ y = R \cdot \ln \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\eta}{2} \right); \end{cases} \quad (3)$$

– рівновелику проєкцію (наприклад, аналогічну рівновеликій циліндричній проєкції Ламберта), в якій  $m_x = \sec \eta$ ,  $m_y = \cos \eta$  та  $m_p = 1$ ,

$$\begin{cases} x = R \cdot \xi; \\ y = R \cdot \sin \eta. \end{cases} \quad (4)$$

Особливістю наведених проєкцій є рівність абсцис, що істотно спрощує трансформування між проєкціями.

Координатним колам сфери на земному еліпсоїді відповідають еліпси  $NA'CS$  та  $EAA'W$  з півосями  $a$  і  $b$  (осьовий меридіан) та  $a$  і  $\rho$  (перпендикулярний перетин), де  $\rho$  – радіус-вектор  $OA'$ , що обчислюється за відомою фор-

мулою ( $e$  – перший ексцентриситет меридіанного еліпса):

$$\rho = a \cdot \sqrt{\frac{1-e^2}{1-e^2 \cos^2 \xi}}. \quad (5)$$

На цей час у поперечно-циліндричних проєкціях земного еліпсоїда на площину за вісь абсцис приймають осьовий меридіан (еліпс абсцис), але замість ординатного еліпса  $EAA'W$  використовують практично геодезичні лінії, проведені через задану точку перпендикулярно до осьового меридіана. Тому лінія ординат не є плоскою, вона має двояку кривизну як довільна геодезична лінія. Наприклад, абсциса в проєкції Кассіні – Зольднера [Snyder, 1987] у межах  $6^\circ$  координатної зони близька до абсциси в проєкції Гаусса – Крюгера, а ордината – довжині геодезичної лінії між заданою точкою та її проєкцією на осьовий меридіан.

Для перетворення координат між різними геодезичними проєкціями використовують алгоритми переходу через геодезичні координати [Łyszczewicz, 2024]. Для цього розроблено універсальне програмне забезпечення PROJ [Автори PROJ, 2025]. Трансформація рівнопроміжної проєкції в рівнокутну або рівновелику теж неможлива без переходу до геодезичних широти  $B$  та довготи  $L$ , що ускладнює врахування спотворень кутів, довжин ліній та площ.

## Мета

Рівнопроміжні поперечно-циліндричні проєкції використовують для картографування витягнутих вздовж меридіана територій. В рівнопроміжних проєкціях відсутні спотворення вздовж осьового меридіана та перпендикулярних до нього ліній [Літинський, 2001], тому в них спотворення площ менше, ніж у обов'язковій в Україні рівнокутній проєкції Гаусса – Крюгера [Інструкція, 1998], [Порядок, 2016].

Наприклад, проєкцією Кассіні – Зольднера продовжують користуватися для картографічних досліджень, вона доступна в ArcGIS, ArcMap, QGIS. Точність алгоритму цієї проєкції [Snyder, 1987] за межами  $6^\circ$  координатної зони істотно зменшується і досягає дециметрових відхилень.

Мета дослідження – розроблення точнішого алгоритму рівнопроміжної поперечно-циліндричної проєкції. У цій роботі обґрунтовано високоточний алгоритм визначення плоских

прямокутних координат у рівнопроміжній проєкції земного еліпсоїда використанням геоцентричних кутів у площинах координатних еліпсів  $NA'S$  та  $EAA'W$  (рис. 1).

### Методика

Для обґрунтування алгоритму перетворення координат використано загальнонаукові методи абстрагування, аналізу, синтезу та математичного моделювання.

### Результати

У роботі наведено формули та приклади обчислення плоских прямокутних координат рівнопроміжної поперечно-циліндричної проєкції за геодезичними координатами, зворотного перетворення, масштабу спотворення та кута зближення меридіанів.

#### Геометричне обґрунтування проєкції

Для побудови проєкції через задану на поверхні еліпсоїда точку  $A$ , геодезичні координати якої  $B$  та  $L$ , проведемо геоцентричний перетин  $WA'AE$  перпендикулярно до площини осьового меридіана координатної зони  $NA'S$  (рис. 1).

Тепер положення точки  $A$  на поверхні еліпсоїда в межах до  $\pm 90^\circ$  координатної зони можна також однозначно визначити криволінійними координатами: абсцисою  $\xi = CA'$  відносно екватора  $WCDE$  та ординатою  $\eta = A'A$  щодо меридіана  $NA'S$ .

Дугам еліпсоїда  $\xi$  та  $\eta$  (рис. 1) відповідають геоцентричні кути  $\zeta$  та  $\eta$  між відповідними радіусами-векторами  $OC-OA'$  та  $OA'-OA$ .

Спроєкуємо точки еліпсоїда на сферу за їх радіусами-векторами. Тоді зв'язок між координатами точок на сфері та на еліпсоїді має вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \zeta; \\ \lambda &= L, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

де  $\varphi$  та  $\lambda$  – сферичні широта та довгота точок;  $\lambda$  та  $L$  – геоцентрична широта та геодезична довгота точок.

Геоцентричні кути  $\zeta$  та  $\eta$  визначаються з допоміжного полярного прямокутного сферичного трикутника  $A'_sN_sA_s$  (рис. 2) за формулами:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \xi &= \frac{\operatorname{tg} \phi}{\cos l} = \frac{(1-e^2) \operatorname{tg} B}{\cos l}; \\ \sin \eta &= \cos \phi \cdot \sin l, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

де  $e = \sqrt{2 \cdot \alpha - \alpha^2}$  – перший ексцентриситет меридіанного еліпса;  $\alpha$  – полярне стиснення земного еліпсоїда;  $l$  – різниця довгот заданої точки та осьового меридіана координатної зони.

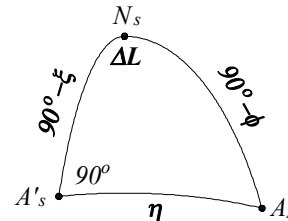


Рис. 2. Полярний сферичний трикутник

Приймаючи за плоскі координати  $x$  та  $y$  довжини відповідних дуг еліпсоїду  $\xi$  та  $\eta$ , отримаємо систему прямокутних координат у рівнопроміжній проєкції [Радов, 2018]:

$$\left. \begin{aligned} x &= CA' = R_\xi \xi; \\ y &= A'A = R_\eta \eta, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

де  $R_\xi$  та  $R_\eta$  – інтегральні радіуси кривизни дуг  $CA'$  та  $A'A$ .

Використовуючи для обчислення ординат  $y$  функції геоцентричного кута  $\eta$  аналогічно до формул (3) та (4), отримаємо практично рівнокутну та рівновелику проєкції [Радов, Соболев, 2018].

Для визначення масштабу спотворення проєкції  $m$  та геодезичного зближення меридіанів  $\gamma$  проведемо в заданій точці  $A$  площину  $nAcs$  паралельно до площини осьового меридіана (рис. 1). У результаті перетину цієї площини з поверхнею земного еліпсоїда отримаємо еліпс  $nAcs$ , велика піввісь якого  $a'$  та велика піввісь еліпсоїда  $a$  пов'язані рівнянням

$$m = \frac{a}{a'}. \quad (9)$$

У прямокутному трикутнику  $Ooc$  (рис. 3) довжина катета  $Oo$  являє собою ординату точки  $Y_A$  в системі просторових прямокутних координат, а гіпотенуза  $Oc$  – велику піввісь еліпсоїда.

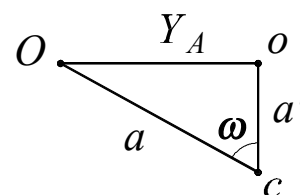


Рис. 3. Схема визначення масштабу спотворення

Тому масштаб спотворення абсиси становить

$$m_x = \sec \omega, \quad (10)$$

де кут  $\omega$  визначається за формулою

$$\sin \omega = \frac{\cos B \cdot \sin l}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}. \quad (11)$$

Оскільки ординати в рівнопроміжній проєкції не спотворюються (тобто  $m_y = 1$ ), масштаб спотворення площі дорівнюватиме

$$m_P = m_x \cdot m_y \cdot \cos 90^\circ = \sec \omega. \quad (12)$$

Наприклад, для вихідних даних  $B = 48^\circ$ ,  $l = 3^\circ$ ,  $a = 6378245$  м,  $\alpha = 1/298,3$  отримаємо за формулою (11)  $\sin \omega = 0,03508$ . Отже, кут спотворення проєкції  $\omega = 2,01^\circ$ . Тому масштаби спотворень зображення у цій точці, обчислені за формулами (10) та (12), становлять  $m_x = m_P = 1,000616$ , якщо  $m_y = 1$ .

Геодезичним зближенням меридіанів у точці  $A$  є кут  $\gamma$  між геодезичним меридіаном цієї точки  $AN$  та дотичною  $An$  до еліпсоїда в площині, що паралельна до осьового меридіана  $nAc$  (рис. 1).

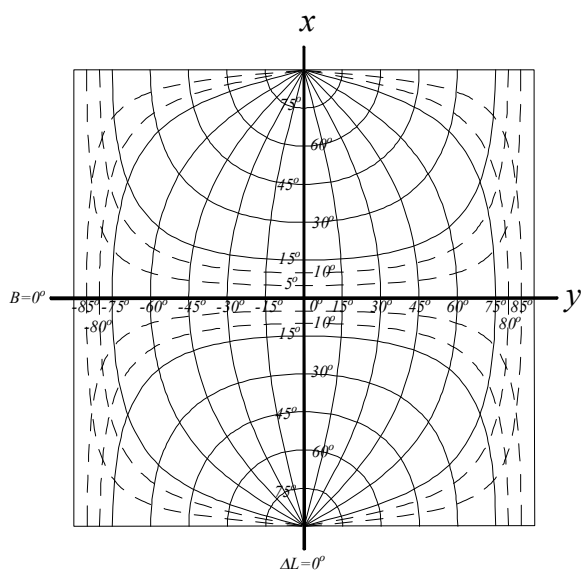


Рис. 4. Картографічна сітка рівнопроміжної поперечно-циліндричної проєкції

Картографічну сітку рівнопроміжної поперечно-циліндричної проєкції, основаної на використанні геоцентричних координатних еліпсів, наведено на рис. 4.

### Обчислення плоских координат

Згідно з геометричним обґрунтуванням проєкції абсцисою  $x$  є довжина дуги осьового

меридіана від екватора до точки  $A'$ . Довжину дуги меридіана обчислюють за формулою [Савчук, 2005]

$$x = a(1 - e^2) \int_0^{B'} \frac{dB'}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 B')^3}}, \quad (13)$$

де  $B'$  – геодезична широта точки  $A'$ .

Для визначення абсиси знайдемо геоцентричну широту  $\xi$  точки  $A'$  за формулою (7) та її геодезичну широту  $B'$  за формулою:

$$\operatorname{tg} B' = \frac{\operatorname{tg} \xi}{(1 - e^2)} = \frac{\operatorname{tg} B}{\cos l}. \quad (14)$$

Абсцису  $x$  обчислимо як довжину дуги меридіана від екватора до точки з широтою  $B'$  за відомими формулами [Савчук, 2005] з додатковими елементами розкладу підінтегральної функції (13) в ряд:

$$x = R \cdot B' + \sum_{i=1}^{\infty} A_{2i} \sin(2i \cdot B'), \quad (15)$$

$$\text{де } R \approx A_0 \left( 1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4 + \frac{175}{256} e^6 + \frac{11025}{16384} e^8 + \frac{43659}{65536} e^{10} \right) \quad (16)$$

$A_0 = a(1 - e^2)$  – допоміжний коефіцієнт;

$a$  – велика піввісь земного еліпсоїда;

$$\left. \begin{aligned} A_2 &\approx -A_0 \left( \frac{3}{8} e^2 + \frac{15}{32} e^4 + \frac{525}{1024} e^6 + \frac{2205}{4096} e^8 \right); \\ A_4 &\approx A_0 \left( \frac{15}{256} e^4 + \frac{105}{1024} e^6 + \frac{2205}{16384} e^8 \right); \\ A_6 &\approx -A_0 \left( \frac{35}{3072} e^6 + \frac{105}{4096} e^8 \right). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Для визначення ординати знайдемо радіус-вектор  $y$  у точці  $A'$  з широтою  $B'$  та ексцентриситет  $e_y$  допоміжного (ординатного) еліпса  $WA'AE$ :

$$\rho_{A'} = \frac{a \cdot \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \xi}}; \quad (18)$$

$$e_y = \frac{\sqrt{a^2 - \rho_{A'}^2}}{a}, \quad (19)$$

де  $\xi$  та  $\rho_{A'}$  – геоцентрична широта та радіус-вектор еліпсоїда в точці  $A'$ .

Кут між нормаллю допоміжного еліпса  $WA'AE$  та лінією  $WE$  екватора обчислимо через геоцентричний кут  $\eta$  (7) за формулою:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\operatorname{tg}(90^\circ - \eta)}{1 - e_y^2}. \quad (20)$$

Тоді довжина дуги допоміжного еліпса  $WA'AE$  між точками  $A'$  та  $A$  є ординатою  $y$  цієї точки:

$$y = R'(90^\circ - \psi) - \sum_{i=1}^{\infty} A'_{2i} \sin(2i \cdot \psi), \quad (21)$$

де радіус  $R'$  та коефіцієнти  $A'_2, A'_4, A'_6$  визначають за формулами (16) та (17) для ексцентриситету  $e_y$  (19).

Зауважимо, що за від'ємних значень кута  $\psi$  (коли точка розміщена західніше від осьового меридіана) у формулі (21) замість  $(90^\circ - \psi)$  треба брати  $(-90^\circ - \psi)$ .

### Обчислення геодезичних координат

Оскільки плоскі прямокутні координати  $x$  (15) та  $y$  (21) в рівнопроміжній проєкції є, по суті, довжинами дуг  $CA'$  та  $A'A$  відповідних еліпсів  $NA'CS$  та  $WA'AE$ , необхідно спочатку знайти параметри цих еліпсів – ексцентриситети  $e$  і  $e_y$  (19), радіуси еквівалентних еліпсів за довжиною кіл  $R$  і  $R'$  (16) та відносні величини  $n$  і  $n_y$ :

$$n = \frac{\alpha}{2 - \alpha}; \quad n_y = \frac{a - \rho_{A'}}{a + \rho_{A'}}, \quad (22)$$

а потім – геоцентричні кути  $\xi$  та  $\eta$ , за якими можна обчислити геодезичні координати  $B$  та  $L$  на основі рівнянь (7).

Для визначення геоцентричних кутів  $\xi$  та  $\eta$  скористаємося найточнішим алгоритмом обчислення геодезичної широти точки  $B'$  за довжиною дуги меридіана  $x$  [Deakin, 2010], в якому використовується зображення еліпсоїда на сфері за проєкцією Мольвейде.

Наближене значення сферичної широти

$$u = \frac{x}{R} \quad (23)$$

уточнюємо за формулою:

$$\theta = u + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{2i} \sin(2i \cdot u), \quad (24)$$

де коефіцієнти  $\beta_2, \beta_4, \beta_6, \beta_8$  обчислюють за відносною величиною  $n$ :

$$\left. \begin{aligned} \beta_2 &\approx -\frac{1}{2}n + \frac{2}{3}n^2 - \frac{37}{96}n^3 + \frac{1}{360}n^4 + \frac{81}{512}n^5 - \frac{96199}{604800}n^6; \\ \beta_4 &\approx -\frac{1}{48}n^2 - \frac{1}{15}n^3 + \frac{437}{1440}n^4 - \frac{46}{105}n^5; \\ \beta_6 &\approx -\frac{17}{480}n^3 + \frac{37}{840}n^4 + \frac{209}{4480}n^5; \\ \beta_8 &\approx -\frac{4397}{161280}n^4 + \frac{11}{504}n^5. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Геодезична широта точки  $B'$  за довжиною дуги меридіана  $x$  остаточно визначається за формулою [Deakin, 2010]:

$$B' = \theta + \sum_{i=1}^{\infty} k_{2i} \sin(2i \cdot \theta) \quad (26)$$

де

$$\left. \begin{aligned} k_2 &\approx +2n - \frac{2}{3}n^2 - 2n^3 + \frac{116}{45}n^4 + \frac{26}{45}n^5 - \frac{2854}{675}n^6; \\ k_4 &\approx \frac{7}{3}n^2 - \frac{8}{5}n^3 - \frac{227}{45}n^4 + \frac{2704}{315}n^5; \\ k_6 &\approx +\frac{56}{15}n^3 - \frac{136}{35}n^4 - \frac{1262}{105}n^5; \\ k_8 &\approx +\frac{4279}{630}n^4 - \frac{332}{35}n^5. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

За геодезичною широтою  $B'$  обчислюють геоцентричний кут  $\xi$ :

$$\xi = \arctg[(1 - e^2) \cdot \tg B'], \quad (28)$$

а потім – радіус-вектор земного еліпсоїда в точці  $A'$  та ексцентриситет  $e_y$  допоміжного еліпса  $WA'AE$  за формулами (18) та (19).

Обчислення аналогів “наближеної сферичної широти”  $u'$ , “сферичної широти”  $\theta$  та “геодезичної широти”  $\psi$  для допоміжного еліпса  $WA'AE$  виконується за формулами [Deakin, 2010]:

$$u' = 90^\circ - \frac{y}{R'}; \quad (29)$$

$$\theta' = u' + \sum_{i=1}^{\infty} \beta'_{2i} \sin(2i \cdot u'); \quad (30)$$

$$\psi = \theta' + \sum_{i=1}^{\infty} k'_{2i} \sin(2i \cdot \theta'), \quad (31)$$

де коефіцієнти  $\beta'_2, \beta'_4, \beta'_6, \beta'_8$  та  $k'_2, k'_4, k'_6, k'_8$  визначаються за формулами (25) та (27) для ексцентриситету  $e_y$  (19).

За кутом  $\psi$  між нормаллю до допоміжного еліпса  $WA'AE$  та лінією  $WE$  екватора обчислюють геоцентричний кут  $\eta$  за формулою:

$$\eta = 90^\circ - \arctg[(1 - e_y^2) \cdot \tg \psi]. \quad (32)$$

Геодезичні координати точки  $B$  та  $L$  відносно екватора та осьового меридіана визначають за формулами:

$$\tg l = \frac{\tg \eta}{\cos \xi}; \quad (33)$$

$$\tg B = \frac{\tg \phi}{1 - e^2}, \quad (34)$$

$$\text{де} \quad \phi = \arcsin(\sin \xi \cdot \cos \eta). \quad (35)$$

### Приклади перетворення координат

Приклади перетворення координат наведено в табл. 1 та табл. 2.

Неточності формул обчислення координат стають очевидними під час зворотного перетворення. Тому для перевірки точності наведених алгоритмів поперечно-циліндричної проєкції виконано розрахунки послідовного

перетворення координат  $B, L \rightarrow x, y \rightarrow B, L$  та  $x, y \rightarrow B, L \rightarrow x, y$  з округленням розрахункових значень прямокутних координат до 0,1 мм та геодезичних координат до 0,00001".

Таблиця 1

**Обчислення плоских координат**

|                   |              |   |         |             |              |    |         |
|-------------------|--------------|---|---------|-------------|--------------|----|---------|
| $B$               | 48           | 0 | 0,0000  | $l$         | 3            | 0  | 0,0000  |
| $a$               | 6378245,000  |   |         | $\alpha$    | 0,003352330  |    |         |
| $\text{tg } \phi$ | 1,103178717  |   |         | $\phi$      | 47           | 48 | 30,9283 |
| $\text{tg } \xi$  | 1,104692660  |   |         | $\xi$       | 47           | 50 | 51,6760 |
| $\sin \eta$       | 0,035149326  |   |         | $\eta$      | 2            | 0  | 51,5625 |
| $\text{tg } B'$   | 1,112136659  |   |         | $\rho_{A'}$ | 6366466,3892 |    |         |
| $e$               | 0,081813334  |   |         | $e_y$       | 0,0690745043 |    |         |
| $B'$              | 48,03906983  |   |         | $\psi$      | 87,99310376  |    |         |
|                   | 48           | 2 | 20,6514 |             | 87           | 59 | 35,1735 |
| $A_0$             | 6367558,4969 |   |         | $A'_0$      | 6372357,0553 |    |         |
| $A_2$             | -16036,4802  |   |         | $A'_2$      | -8833,9572   |    |         |
| $A_4$             | 16,8281      |   |         | $A'_2$      | 5,1027       |    |         |
| $A_6$             | -0,0220      |   |         | $A'_2$      | -0,0037      |    |         |
| $x$               | 5322865,4995 |   |         | $y$         | 223823,2743  |    |         |

Таблиця 2

**Обчислення геодезичних координат**

|                    |               |    |                     |               |            |
|--------------------|---------------|----|---------------------|---------------|------------|
| $x$                | 5322865,4995  |    | $y$                 | 223823,2743   |            |
| $a$                | 6378245,000   |    | $\text{tg } \xi$    | 1,104692660   |            |
| $\alpha$           | 0,003352330   |    | $\rho_{A'}$         | 6366466,3892  |            |
| $e$                | 0,081813334   |    | $e_y$               | 0,0690745043  |            |
| $n$                | 0,001678979   |    | $n_y$               | 0,000924196   |            |
| $R$                | 6367558,4969  |    | $R'$                | 6372357,0553  |            |
| $u$<br>(рад.)      | 0,835935077   |    | $u'$<br>(рад.)      | 1,535672232   |            |
| $\beta_2$          | -0,0008376121 |    | $\beta'_2$          | -0,0004615289 |            |
| $\beta_4$          | -5,90417E-08  |    | $\beta'_4$          | -1,78470E-08  |            |
| $\beta_6$          | -1,673E-10    |    | $\beta'_6$          | -2,793E-11    |            |
| $\beta_8$          | -2,164E-13    |    | $\beta'_8$          | -1,988E-14    |            |
| $\theta$<br>(рад.) | 0,835101751   |    | $\theta'$<br>(рад.) | 1,535639839   |            |
| $k_2$              | 0,0033560696  |    | $k'_2$              | 0,0018478209  |            |
| $k_4$              | 6,569986E-06  |    | $k'_4$              | 1,991722E-06  |            |
| $k_6$              | 1,76388E-08   |    | $k'_6$              | 2,94422E-09   |            |
| $k_8$              | 5,385E-11     |    | $k'_8$              | 4,949E-12     |            |
| $B'$<br>(рад.)     | 0,838439938   |    | $\psi$<br>(рад.)    | 1,535769380   |            |
| $\xi$<br>(рад.)    | 0,835099691   |    | $\eta$<br>(рад.)    | 0,035156567   |            |
| $\sin \phi$        | 0,740905309   |    | $\text{tg } l$      | 0,052407779   |            |
| $\phi$             | 47            | 48 | 30,9283             | $l$           | 3 0 0,0000 |
| $\text{tg } B$     | 1,110612515   |    | $B$                 | 48 0 0,0000   |            |

У межах  $15^\circ$  координатних зон результати перетворень збігаються із вихідними даними. Для широт  $B$  та різниці довгот  $l$  від  $10^\circ$  до  $\pm 90^\circ$  спостерігається розбіжність із вихідними даними результатів перетворення прямокутних координат  $x, y$  до 0,4 мм, а геодезичних координат  $B, L$  – до 0,00003".

Отже, наведені алгоритми забезпечують високу точність перетворення координат на будь-яких широтах для координатних зон із різницею довгот до  $\pm 90^\circ$ .

**Обчислення зближення меридіанів**

Для обчислення зближення меридіанів  $\gamma$  за диференціалом широти  $\partial B$  та  $\gamma'$  за диференціалом різниці широти  $\partial l$  використаємо такі залежності [Савчук, 2005]:

$$\text{tg } \gamma = -\frac{dy}{dB} \cdot \frac{dx}{dB}; \quad \text{tg } \gamma' = \frac{dx}{dl} \cdot \frac{dy}{dl}, \quad (36)$$

де  $\frac{dx}{dB}, \frac{dy}{dB}, \frac{dx}{dl}, \frac{dy}{dl}$  – часткові похідні від абсциси  $x$  (15) та ординати  $y$  (21) за широтою  $B$  та різницею довгот  $l$ .

Часткові похідні від плоских координат за широтою  $B$  мають вигляд:

$$\frac{\partial x}{\partial B} = [R + \sum_{i=1}^{\infty} 2i \cdot A_{2i} \cos(2i \cdot B')]; \quad \frac{\partial B'}{\partial B}; \quad (37)$$

$$\frac{\partial y}{\partial B} = [R'' \cdot (90^\circ - \psi) - \sum_{i=1}^{\infty} A''_{2i} \sin(2i \cdot \psi)] \frac{\partial e_y}{\partial B} - [R' + \sum_{i=1}^{\infty} 2i \cdot A'_{2i} \cos(2i \cdot \psi)] \frac{\partial \psi}{\partial B}, \quad (38)$$

$$\text{де} \quad \frac{\partial B'}{\partial B} = \frac{\cos^2 B'}{\cos^2 B \cdot \cos l}; \quad (39)$$

$$\frac{\partial e_y}{\partial B} = \frac{(1 - e^2) \rho_{A'^2} \cdot e^2 \cdot \sin 2\xi \cdot \cos^2 \xi}{2(1 - e^2 \cos^2 2\xi) a^2 \cdot e_y \cdot \cos^2 B \cdot \cos l}; \quad (40)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial B} = -\frac{\cos 2\psi}{1 - e_y^2} \left( \frac{(1 - e^2) \cdot \cos^2 \phi \cdot \sin \phi \cdot \sin l}{\sin^2 \eta \cdot \cos^2 B} + 2e_y \cdot \text{tg } \psi \cdot \frac{\partial e_y}{\partial B} \right). \quad (41)$$

Часткові похідні від плоских координат за різницею довгот  $l$  мають вигляд:

$$\frac{\partial x}{\partial l} = [R + \sum_{i=1}^{\infty} 2i \cdot A_{2i} \cos(2i \cdot B')]; \quad \frac{\partial B'}{\partial l}; \quad (42)$$

$$\frac{\partial y}{\partial l} = [R'' \cdot (90^\circ - \psi) - \sum_{i=1}^{\infty} A''_{2i} \sin(2i \cdot \psi)] \frac{\partial e_y}{\partial l} -$$

$$-[R' + \sum_{i=1}^{\infty} 2i \cdot A'_{2i} \cos(2i \cdot \psi)] \frac{\partial \psi}{\partial l}, \quad (43)$$

де 
$$\frac{\partial B'}{\partial l} = -\frac{\cos^2 B' \cdot \operatorname{tg} B' \cdot \sin l}{\cos^2 l}; \quad (44)$$

$$\frac{\partial e_y}{\partial l} = -\frac{\rho_{A'}^2 \cdot e^2 \cdot \sin^2 2\xi \cdot \operatorname{tg} l}{4(1 - e^2 \cos^2 2\xi) a^2 \cdot e_y}; \quad (45)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial l} = -\frac{\cos^2 \psi}{1 - e_y^2} \left( \frac{\cos \phi \cdot \cos l}{\sin^2 \eta} - 2e_y \cdot \operatorname{tg} \psi \frac{\partial e_y}{\partial l} \right). \quad (46)$$

Значення величин  $R''$ ,  $A''_2$ ,  $A''_4$  та  $A''_6$  визначаються за формулами:

$$R'' \approx -a \left( 2\frac{1}{4}e_y + 4\frac{3}{64}e_y^3 + 6\frac{5}{256}e_y^5 + 8\frac{175}{16384}e_y^7 \right); \quad (47)$$

$$\left. \begin{aligned} A''_2 &\approx -a \left( 2\frac{3}{8}e_y + 4\frac{3}{32}e_y^3 + 6\frac{45}{1024}e_y^5 + 8\frac{105}{4096}e_y^7 \right); \\ A''_4 &\approx a \left( 4\frac{15}{256}e_y^3 + \left( 6\frac{45}{1024} \right)e_y^5 + \left( 8\frac{525}{16384} \right)e_y^7 \right); \\ A''_6 &\approx -a \left( 6\frac{35}{3072}e_y^5 + 8\frac{175}{12288}e_y^7 \right). \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Наближене значення зближення меридіанів можна обчислити за відомою формулою [Deakin, 2010]

$$\operatorname{tg} \gamma = \sin B \cdot \operatorname{tg} l. \quad (49)$$

Таблиця 3

#### Обчислення зближення меридіанів

|                                                                                                              |              |                            |              |    |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|----------------------------|--------------|----|----|
| $R''$                                                                                                        | -193992,064  | $A''_2$                    | -291122,592  |    |    |
| $A''_4$                                                                                                      | 336,473      | $A''_6$                    | -0,363       |    |    |
| Зближення меридіанів $\gamma$ за $\partial B$                                                                |              |                            |              |    |    |
| $\partial B'/\partial B$                                                                                     | 0,99985573   | $\partial \eta/\partial B$ | -0,03880235  |    |    |
| $\partial e_y/\partial B$                                                                                    | 0,05465348   | $\partial \psi/\partial B$ | 0,03889277   |    |    |
| $\partial x/\partial B$                                                                                      | 6369969,557  | $\partial y/\partial B$    | -247779,958  |    |    |
| $\operatorname{tg} \gamma$                                                                                   | 0,03889814   | $\gamma$                   | 2            | 13 | 39 |
| Зближення меридіанів $\gamma'$ за $\partial l$                                                               |              |                            |              |    |    |
| $\partial e_y/\partial l$                                                                                    | -8,65185E-05 | $\partial \psi/\partial l$ | 0,668220719  |    |    |
| $\partial x/\partial l$                                                                                      | -166003,5851 | $\partial y/\partial l$    | -4269932,822 |    |    |
| $\operatorname{tg} \gamma'$                                                                                  | 0,03887733   | $\gamma'$                  | 2            | 13 | 35 |
| Зближення меридіанів за наближеною формулою<br>$\operatorname{tg} \gamma \approx \sin B \operatorname{tg} l$ |              |                            |              |    |    |
| $\operatorname{tg} \gamma$                                                                                   | 0,03894657   | $\gamma$                   | 2            | 13 | 49 |

#### Висновки

Розроблено точний алгоритм рівнопрямісної поперечно-циліндричної проєкції, в якому використано геоцентричні координатні еліпси – осьовий меридіан (еліпс абсцис) та перпендикулярний до нього еліпс ординат. Плоскі прямокутні координати обчислено як дуги відповідних еліпсів від екватора до точки перетину осьового меридіана з ординатним еліпсом та від осьового меридіана до заданої точки, а геодезичні координати – як функції довжин дуг координатних еліпсів. Для перетворення координат запропоновано геоцентричні координатні кути в площинах координатних еліпсів.

Наведено формули та приклади прямого та зворотного перетворення координат, масштабу спотворення та кута зближення меридіанів.

Математичне моделювання показало можливість трансформування розглянутої рівнопрямісної проєкції до практично рівнокутної та рівновеликої проєкцій, що може спростити врахування спотворень кутів, довжин ліній та площ.

У наведеному алгоритмі плоскі прямокутні координати визначено з точністю обчислення довжини дуги меридіана і за будь-яких значень геодезичних широт та довгот похибки не перевищують 0,1 мм. Забезпечується також висока точність зворотного перетворення.

Послідовне перетворення координат  $B, L \rightarrow x, y \rightarrow B, L$  та  $x, y \rightarrow B, L \rightarrow x, y$  із округленням прямокутних координат до 0,1 мм та геодезичних координат до 0,00001" показало розбіжність із вихідними даними результатів перетворення прямокутних координат  $x, y$  до 0,4 мм, а геодезичних координат  $B, L$  – до 0,00003".

Отже, наведені алгоритми забезпечують високу точність перетворення координат для будь-яких широт та різниць довгот.

#### Список літератури

Автори PROJ. Бібліотека програмного забезпечення для перетворення координат PROJ (2025). [Електронний ресурс]. Фонд геопросторових даних з відкритим кодом. <https://proj.org/>.

- Гудз І. М. (2021). Основи математичної картографії : навч. посіб. За наук. ред. П. М. Зазуляка. Львів: Видавництво Львівської політехніки. 504 с.
- Інструкція з топографічного знімання у масштабах 1:5000, 1:2000, 1:1000 та 1:500 (ГКНТА-2.04-02-98). Наказ Головного управління геодезії, картографії та кадастру при Кабінеті Міністрів України від 9.04.1998 р. № 56.
- Геодезичний енциклопедичний словник (2001). За ред. В. Літинського. Львів: Євросвіт. 668 с.
- Порядок використання Державної геодезичної референційної системи координат УСК-2000 при здійсненні робіт із землеустрою. Наказ Міністерства аграрної політики та продовольства України від 2.12.2016 р. № 509.
- Радов С. Г. (2018). Поперечно-циліндрична рівнокутна проекція, побудована на геоцентричних широтах. *Зб. матеріалів звіт. наук.-практ. конф. Луган. нац. аграр. ун-ту* (Харків, 20–23 лютого 2018 р.). Харків: Стильна типографія. С. 89–91.
- Радов С. Г., Соболев М. Б. (2018). Системи плоских прямокутних координат на основі проекції Кассіні. *Матеріали міжнар. наук.-практ. конф. "Актуальні проблеми землеустрою у сільському господарстві: глобальний, національний та регіональний аспекти"*. Умань. С. 25–27.
- Савчук С. Г. (2005). Вища геодезія: підручник. 2-ге вид., допов. Житомир: ЖДТУ. 316 с.
- Deakin R. E., Hunter M. N., Karney C. F. F. (2010). The Gauss – Krüger projection. Victorian Regional Survey Conference (Warrnambool, 10–12 September, 2010).
- Engsager K., Poder K. (2007). A highly accurate world wide algorithm for the transverse Mercator mapping (almost). *Proc. XXIII Int. Cartographic Conf. (ICC2007)*, 4–10 Aug. 2007, Moscow.
- Łomnicki A. (1927). *Kartografia matematyczna*. Lwiv–Warszawa. 191 p.
- Łyszkowicz A. (2024). *Geodezyjne systemy i układy odniesienia*. Dęblin: Lotnicza Akademia Wojskowa. 106 p.
- Snyder J. P. (1987). *Map Projections. A Working Manual*. Washington United States Government Printing Office. 384 p.

Stanislav RADOV<sup>1</sup>, Serhii ROTTE<sup>2</sup>, Maksym SOBOLEV<sup>3</sup>, Valentyna LYTVYN<sup>4</sup>, Alina VOLONTYR<sup>5</sup>

<sup>1</sup> Department of Geodesy, Land Management, Building Structures and Life Safety, Cherkasy State Technological University, 460, Shevchenko Blvd., Cherkasy, 18000, Ukraine, phone: +380505529147, e-mail: s.radov@chdtu.edu.ua; <https://orcid.org/0009-0003-5721-996X>

<sup>2</sup> Department of Geodesy, Land Management, Building Structures and Life Safety, Cherkasy State Technological University, 460, Shevchenko Blvd., Cherkasy, 18000, Ukraine, phone: +380637906470, e-mail: s.rotte@chdtu.edu.ua; <https://orcid.org/0000-0003-1281-1241>

<sup>3</sup> The HALO Trust, 57A, Heorhiy Tarasenko str., Kharkiv, 61000, Ukraine, phone: +380507697382, e-mail: sobolevmaxim@ukr.net

<sup>4</sup> Department of Geodesy, Land Management, Building Structures and Life Safety, Cherkasy State Technological University, 460, Shevchenko Blvd., Cherkasy, 18000, Ukraine, phone: +380673022165, e-mail: litvin\_valyav@ukr.net

<sup>5</sup> Department of Geodesy, Land Management, Building Structures and Life Safety, Cherkasy State Technological University, 460, Shevchenko Blvd., Cherkasy, 18000, Ukraine, phone: +380987499794, e-mail: a.volontyr@chdtu.edu.ua; <https://orcid.org/0000-0001-5609-4569>

#### HIGH-PRECISION COORDINATE TRANSFORMATION ALGORITHM FOR EQUIDISTANT TRANSVERSE CYLINDRICAL PROJECTION

The aim of the present study is to design an algorithm for direct and inverse transformation of geodetic coordinates and flat rectangular coordinates of equidistant transverse cylindrical projection, based on the use of geocentric coordinate ellipses. *Methods.* General scientific methods of abstraction, analysis, synthesis, and mathematical modeling have been deployed to substantiate the coordinate transformation algorithm. *Results.* The proposed study has developed an accurate algorithm for equidistant transverse cylindrical projection, which uses geocentric coordinate ellipses, namely, the axial meridian (ellipse abscissa) and the ordinate ellipse perpendicular to it. Within the coordinate zone, the position of a point on the ellipsoid's surface is uniquely determined by curvilinear coordinates. These coordinates are calculated as arcs of the corresponding ellipses measured from the equator to the intersection point of the axial meridian with the ordinate ellipse, and then from the axial meridian to a given point. The arcs of the corresponding coordinate ellipses are treated as flat rectangular coordinates. To convert these coordinates, proposed transformations use geocentric coordinate angles within the



planes of the coordinate ellipses. These angles are functions of geodesic and rectangular coordinates, which facilitate both direct and inverse transformations. In the given algorithm, flat rectangular coordinates are determined with the accuracy of calculating the meridian arc length. At any geodetic latitudes and longitudes values, the errors do not exceed 0.1 mm. Moreover, high accuracy of the inverse transformation is ensured. The paper provides formulas and examples for calculating the flat rectangular coordinates of an equidistant transverse cylindrical projection using geodesic coordinates, the inverse transformation, the scale of distortion, and the angle of meridian convergence. *Scientific novelty.* The study suggests relying on geocentric coordinate ellipses to substantiate equiintermediate transverse cylindrical projection. *Practical value.* The algorithm presented in the study offers submillimeter accuracy for the direct and inverse transformation of coordinates in equidistant transverse cylindrical projection at any latitude, applicable to coordinate zones with longitude differences of up to  $\pm 90^\circ$ .

*Keywords:* transverse cylindrical projection, geometric justification, geodetic coordinates, geocentric coordinate ellipses, geocentric coordinate angles, ellipse arc length, flat rectangular coordinates, coordinate transformations, projection scale, meridian convergence angle.

Надійшла 03.04.2025 р.