

**І. О. Процько, В. М. Теслюк, Р. Б. Дунець**

Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів, Україна

ШВИДКОМУ ПЕРЕТВОРЕННЮ ФУР'Є – 60 РОКІВ

Швидке перетворення Фур'є (ШПФ), з часів появи алгоритму Кулі–Тюкі, займає важливу нішу у величезному інформаційно-технічному просторі сучасних імплементацій. Загалом оцінити важливість та вплив алгоритму Кулі–Тюкі на розвиток різних сфер науки – неймовірно складне завдання. В публікації розглянуто передумови та історичне становлення алгоритму Кулі–Тюкі як фундаментального алгоритму швидкого перетворення Фур'є. Розглянуто розвиток досліджень ШПФ у напрямі розроблення ефективних алгоритмів гармонічного аналізу, що привели до вагомих результатів, підтверджених численними публікаціями. Виділено основні напрями формалізації ШПФ та підкреслено багатоваріантність ефективних обчислень. Відзначено важливість взаємодоповнювального впливу ШПФ на становлення високопродуктивних обчислювальних апаратних засобів. Адже саме розвиток нових методів та технічних можливостей для прискорення виконання ШПФ визначив архітектурні особливості сучасних мікропроцесорів як високоефективних засобів реалізації обчислень. Зазначено, що розвиток програмного забезпечення уможливив створення надійних і дуже швидких програмних систем для виконання перетворень класу Фур'є на різних комп'ютерних платформах та цифрових сигнальних процесорах. У публікації здійснено огляд розвитку ключових аспектів ШПФ у світовій практиці опрацювання сигналів та розроблення засобів ШПФ львівськими науково-дослідними установами за шістьдесят років існування алгоритму Кулі–Тюкі. В ОКБ ЕІВТ ЛПІ, ще до появи швидкого алгоритму Кулі–Тюкі обчислення перетворення Фур'є, почали розробляти цифрові спектроаналізatori. Результатом розробок у 1983–1984 рр. став випуск серійних аналізаторів спектра (приблизно 200 зразків), параметри яких перевищували характеристики аналізаторів всесвітньо відомої фірми "Brüel&Kjaer" (Данія). Засоби ШПФ, розроблені у Львівському науково-дослідному радіотехнічному інституті, у Фізико-механічному інституті НАН України, дали змогу успішно використовувати їх для радіолокаційних станцій, для наукових досліджень у космосі тощо.

Незважаючи на виконані аналізи значущості ШПФ, нові теоретичні результати все ще з'являються, завдяки прогресу в комп'ютерній сфері й апаратному забезпеченні постійно оновлюються основні завдання з використання ШПФ, а нові програми перетворень класу Фур'є розширюють сфери для прикладних досліджень.

Ключові слова: швидке перетворення Фур'є, алгоритм Кулі–Тюкі, швидкі тригонометричні перетворення, спецпроцесори ШПФ, програмні бібліотеки ДПФ.

Вступ / Introduction

Передумови створення ШПФ. Важливою частиною гармонічного аналізу є теорія рядів Фур'є, а для їх ефективної реалізації в цифровому опрацюванні сигналів використовується теорія обчислення дискретного перетворення Фур'є (ДПФ). Дискретизація функцій дала змогу виконувати їхній гармонічний аналіз за допомогою цифрових обчислювальних систем. У травні 1965 р. Джеймс Кулі (James William Cooley), науковий співробітник IBM дослідницького центру (the IBM T. J. Watson Research Center), і Джон Тюкі (John Wilder Tukey), професор Принстонського університету (Princeton University and AT&T Bell Laboratories), опублікували швидкий алгоритм обчислення ДПФ [1], який за значущістю увійшов у першу десятку алгоритмів ХХ ст. [2]. Під швидким алгоритмом розуміють описання обчислювальної процедури, яка не є

очевидним способом обчислення і має меншу обчислювальну складність відповідно до прямого запису алгоритму. Алгоритм Кулі–Тюкі істотно зменшує обчислювальну складність дискретного перетворення Фур'є від $O(N^2)$ до $O(N \log_2 N)$. Наприклад, для обсягу перетворення $N = 2^{10}$ обчислювальна складність алгоритму Кулі–Тюкі у 100 разів менша щодо прямого (1) обчислення ДПФ.

Нехай $x(n)$ – періодична послідовність із періодом $N \cdot T$ (період – N відліків), тобто $x(n) = x(n + m \cdot N \cdot T)$, де m – ціле. Дискретним перетворенням Фур'є (ДПФ) називають пару взаємоднозначних перетворень вигляду:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j2\pi kn\Omega T), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1)$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \exp(j2\pi kn\Omega T), n = 0, 1 \dots N-1, \quad (2)$$

де $\Omega = 2\pi / (NT)$ – основна частота перетворення (бін ДПФ). Виконуючи підстановку Ω , отримуємо $e^{-jkn(2\pi/NT)T} = e^{-j2\pi kn/N}$. Вираз (1) визначає пряме ДПФ, а (2) називають зворотним (оберненим) ДПФ.

Сама ідея застосування ефективних алгоритмів для розв’язання задач виникла до ери поширення комп’ютерів. Схожі ідеї раніше, ще до цього науковці публікували, але не здобували підтримки для їх теоретичного та практичного розвитку. Відомо, що Карл Фрідріх Гаусс першим запропонував методику, яку нині називаємо швидким перетворенням Фур’є (ШПФ), для обчислення коефіцієнтів у тригонометричному розкладі орбіти астероїда в 1805 р. [3]. Методи Рунге (1905), Даніельсона – Ланцоша (1942), використовувались у вузькоспеціалізованих галузях і не перетинались в часі з роботами над ефективними алгоритмами для гармонічного і спектрального аналізу [4], [5]. Вони випередили свій час, хоч ефективні алгоритми спектрального оцінювання були б корисними впродовж останніх більше ніж ста років.

Невдовзі стало зрозуміло, що інший ШПФ-алгоритм, істотно відмінний від алгоритму Кулі – Тюкі (1965), який розробили незалежно Гуд (I. J. Good, 1958) [6] і Томас (L. H. Thomas, 1963) [7], свого часу залишився непоміченим. В алгоритмі Гуда – Томаса перехід до багатовимірного перетворення ДПФ відбувається за китайською теоремою про залишки для цілих чисел, і не потрібно обчислювати добутки на множники, що повертають.

Різні варіації алгоритму Гуда – Томаса з’являлись і раніше. Франк Йетс (F. Yates) запропонував у 1937 р. простий алгоритм [8], тільки з додаваннями та відніманнями для обчислення взаємодій в 2^n факторному експерименті. Та сама ідея, використана для побудови плоскофазованої радіолокаційної антени, відома під назвою матриці Батлера (J. Butler, 1961) [9].

Поява в 1965 р. алгоритму ШПФ розробників Д. Кулі, Д. Тюкі була актуальною і закономірно визначалась науково-технічними потребами людства. Взаємодоповнювальними каталізаторами інтенсивного поширення і розвитку ШПФ для гармонічного аналізу наприкінці 60-х років стали:

- наявність багатьох публікацій, дотичних до тематики ШПФ;
- престижність журналу Computational Mathematics, в якому опубліковано ШПФ, та авторитет авторів (Джон Тюкі був членом Президентського науково-консультативного комітету у 1960–1963 рр. та виконавчим директором науково-інформаційних досліджень у 1961–1985 рр.);
- потужний розвиток обчислювальної техніки на основі інтегральних технологій;
- можливість використання у різноманітних прикладних сферах, адже із середини XIX ст. на основі гармонічного аналізу розробляли прак-

тичні методи вивчення багатьох феноменологічних явищ.

“Гармонічний аналіз і згортка – два різні, але тісно взаємопов’язані між собою розділи цифрового опрацювання інформації” [10]. Для розв’язання багатьох прикладних завдань і аналізу систем використовують згортку. Ефективне обчислення згортки реалізовується на основі теореми про швидку згортку [11], що ґрунтується на використанні швидких перетворень класу Фур’є. За теоремою про швидку згортку результат згортки $y_p(n)$ визначають на основі добутку N -точкових ШПФ $Xp(k)$ і $Hp(k)$

$$Yp(k) = Xp(k) Hp(k), \quad (3)$$

а далі зворотного ШПФ для $Yp(k)$. Тобто дії виконують (рис. 1) окремо над двома $h[n]$, $x[n]$ вхідними послідовностями ШПФ (FFT), відтак поелементне перемноження одержаних послідовностей перетворень і над результатом добутку виконують ЗШПФ (IFFT), щоб одержати результат обчислення згортки $y[n]$.

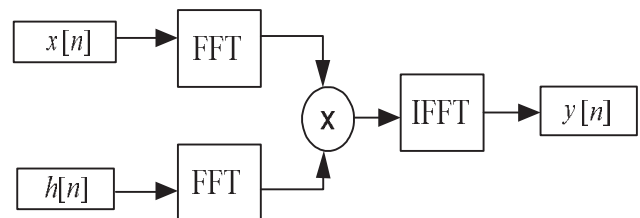


Рис. 1. Структурна схема обчислення за теоремою про швидку згортку / Structural diagram of the calculation behind the fast convolution theorem

Метод швидкої згортки дає змогу істотно зменшити кількість обчислювальних операцій, вже починаючи зі значення обсягу перетворення $N=128$ (із використанням ШПФ Кулі – Тюкі з $2N\log_2 N$ – дійсних добутків та $3N\log_2 N$ – дійсних додавань).

Актуальність цього дослідження зумовлена кількома важливими чинниками: важливість аналізу розвитку підходів ШПФ за шістдесят років існування алгоритму Кулі – Тюкі, оцінювання здобутків з розроблення засобів ШПФ львівськими науково-дослідними установами.

Об’єкт дослідження – процеси розвитку підходів та розробок засобів ШПФ.

Предмет дослідження – методи, засоби, технічні можливості ефективного обчислення дискретних перетворень класу Фур’є.

Мета роботи – огляд та аналіз становлення засобів ефективного обчислення дискретних перетворень класу Фур’є, що започатковані алгоритмом Кулі – Тюкі.

Для досягнення зазначеної мети необхідно вирішити такі **основні завдання дослідження**:

- дослідити розвиток алгоритмічних підходів та розробок засобів ШПФ;
- розглянути внесок дослідників у розвиток алгоритмічних підходів ефективного обчислення дискретних перетворень класу Фур’є;

- описати та проаналізувати здобутки з розроблення засобів ШПФ львівськими науково-дослідними установами;
- визначити сфери та перспективи подальшого застосування ШПФ.

Загалом оцінити важливість опосередкованого впливу алгоритму Кулі – Тюкі на розвиток різних галузей науки неймовірно складно. В роботі наведено загальний огляд розвитку ключових аспектів ШПФ у світовій науці та розроблення засобів ШПФ львівськими науково-дослідними установами за шістдесят років снування алгоритму Кулі–Тюкі.

Подальший розвиток алгоритмів швидкого перетворення класу Фур'є / Further development of fast Fourier transform algorithms

Після появи алгоритму Кулі – Тюкі розпочалися поглиблені дослідження та створення нових підходів до реалізації швидких перетворень Фур'є. Інтенсивні дослідження упродовж 70–80-х років у напрямі розроблення ефективних алгоритмів гармонічного аналізу привели до вагомих результатів, підтверджених численними публікаціями.

Варто відзначити роботи у цьому напрямі таких вчених:

- Дж. Герцель (G. H. Goertzel) – алгоритм (1968) знаходження окремих вихідних значень ДПФ з використанням операції згортки [19];
- Г. Нуссбаумер (H. J. Nussbaumer) – розвиток (1979) ефективних алгоритмів перетворення із використанням поліномів [20];
- К. Р. Рао (K. R. Rao) – розвиток (1982) швидких алгоритмів дискретних тригонометричних перетворень [21];
- П. Дюгамель (P. Duhamel, 1984) – вагомий внесок у популяризацію та вдосконалення розроблення алгоритмів ШПФ із розщепленою основою (Split-Radix FFT) [22];
- Р. Брейсвелл (R. N. Bracewell) – популяризація перетворення Хартлі (1986) [23];
- та багатьох інших, що зробили свій внесок у теорію і практику швидких перетворень класу Фур'є.

Наступні десятиліття характеризуються узагальненнями та розвитком підходів ефективного обчислення дискретних перетворень класу Фур'є, отриманих в результаті інтенсивних напрацювань у попередні два десятиліття. Дослідження розділились на такі напрями формалізації швидких перетворень:

1. Пряма факторизація матриці базису, що передбачає децимацію у часі або за частотою. Опубліковано багато робіт, які описують ефективне обчислення за допомогою факторизації базисів перетворень [12], що відповідають вимогам до наявних засобів та особливостей застосування.

2. Непряме обчислення перетворень із використанням інших видів перетворень класу Фур'є [13], [14].

3. Алгоритми ШПФ, що ґрунтуються на теорії поліноміальних перетворень [15].

4. Швидкі алгоритми перетворень класу Фур'є, основані на використанні розкладу обсягу перетворення на прості множники [16].

5. Алгоритми, що ґрунтуються на теорії складності теоретико-числових перетворень [17].

6. Швидкі обчислення дискретних перетворень класу Фур'є з використанням циклічних згорток [18].

Велику кількість публікацій з теоретико-числових перетворень у скінченних числових полях, їх значення у цифровому опрацюванні інформаційних даних узагальнено в роботі [24]. Важливим теоретичним відкриттям було обґрунтування того, що швидкі дискретні перетворення Фур'є, Уолша (Walsh) і Адамарда (Hadamard) є спеціальними випадками обчислень в алгебрах над полями або кільцями [25].

Завдяки ШПФ було розвинено надалі перетворення Хартлі (ДПХ). Його запропонував як альтернативу перетворенню Фур'є Ральф В. Л. Гартлі (Ralph Vinton Lyon Hartley) у 1942 р. у публікації “A More Symmetrical Fourier Analysis Applied to Transmission Problems”. Можливість використання алгоритму Кулі – Тюкі для ефективного обчислення перетворення Хартлі широко популяризував Р. Брейсвелл (R. N. Bracewell) [23].

Застосування дійсних базисних систем перетворень, що містять дискретні перетворення Хартлі (ДПХ) [26], дискретні косинусні перетворення (ДКП) [27], дискретні синусні перетворення (ДСП) [28] та їх різновиди, стало значним поступом у галузі опрацювання інформаційних даних.

Багатоваріантність ефективних обчислень узагальнено в класифікації, що охоплює алгоритми з основою два, розщепленою основою, змішаною основою, непарного обсягу, складеного обсягу й алгоритм простих множників. Традиційно в алгоритмах типу Кулі – Тюкі велику увагу приділяли швидким алгоритмам для обсягів цілого степеня два. В цих роботах покращувались обчислювальні характеристики алгоритмів типу Кулі – Тюкі, такі як: базові операції зі змішаними основами, розклад складеного (composite) значення обсягу N перетворення, кількість виконаних множень, розділення на окремі незалежні частини алгоритму у вигляді графу потоків [29]. Однак розвиток досліджень різноманітних фізичних явищ та процесів вимагав швидких алгоритмів перетворень із довільними обсягами. Адаже доповнення нулями послідовності перетворення до обсягу, що дорівнював цілому степеню двійки, вносило артефакти у спектральний аналіз різноманітних фізичних явищ та процесів.

Важливим кроком у розвитку оптимізованих методів ШПФ, особливо для розмірів N , які не є степенями двійки, став алгоритм простих множників (PFA, Prime Factor Algorithm) [30], [31]. Алгоритм простих множників, який ще називають алгоритмом Гуда – Томаса (Good–Thomas FFT) [6], [7], подається у вигляді:

$$X(k_1, k_2, \dots, k_p) = \sum_{n_1=0}^{r_1-1} \sum_{n_2=0}^{r_2-1} \dots \sum_{n_p=0}^{r_p-1} x(n_1, n_2, \dots, n_p) W^{n_1 k_1} W^{n_2 k_2} \dots W^{n_p k_p}, \quad (4)$$

де $W^{kn} = e^{-j2\pi kn/N}$; $k_i = 0, 1, \dots, r_i-1$; $i = 1, 2, \dots, p$; $N = r_1 \times r_2 \times \dots \times r_p$ – обсяг послідовності для складеного числа вимагає попарної взаємної простоти множників розкладу $r_1, r_2, \dots, r_p$. В алгоритмі Гуда – Томаса перехід до багатовимірного перетворення ДПФ відбувається за китайською теоремою про залишки для цілих чисел, і не потрібно отримувати добутки на множники, які повертають.

PFA також тісно пов'язаний із алгоритмом швидкого перетворення Фур'є Вінограда, де останній виконує переформулювання перетворення на N_1 і N_2 до вигляду двовимірної згортки. Тому в деяких статтях трапляється назва алгоритм Вінограда PFA FFT або алгоритм Гуда – Вінограда.

Одним із найефективніших варіантів обчислення ДПФ, особливо для великих розмірів, став алгоритм швидкого перетворення Фур'є (ШПФ) із розщепленою основою (Split-Radix FFT). Ідеї оптимізованої версії стандартного алгоритму ШПФ, яка поєднує переваги двійкового (основа-2) та змішаного (основа-4) підходів для підвищення ефективності обчислень, публікувалися і раніше. Алгоритм ШПФ з розщепленою основою опублікували у 1984 р. П. Дюгамель (P. Duhamel) і Г. Голман (H. Hollmann), потім ці вчені вдосконалили його із ефективнішою формою його реалізації [32]. Вони довели, що метод розщепленої основи зменшує кількість арифметичних операцій порівняно із класичним (основа-2) алгоритмом. Так, алгоритм з розщепленою основою потребує менше операцій множення, що робить його швидшим на 10–20 % порівняно зі стандартним за основою-2. Алгоритми з іншими розщепленими основами досліджують до сьогодні [33].

Одним із неочікуваних напрямів розвитку швидких алгоритмів, як відзначають у багатьох виданнях із цифрової обробки інформації [34], є можливість обчислення ДПФ на основі циклічних згорток. Ця ідея здавалась парадоксом. Адже саме за “теоремою швидкої згортки” для аналізу лінійних систем зі сталими параметрами під час обчислення згортки застосовують пряме і зворотне ШПФ. Виявилось, що ефективне обчислення ДПФ може зводитись до обчислення циклічної згортки, що вперше зазначено у публікації Ч. Рейдера (C. Rader) [18] у 1968 р. У цій невеликій двосторінковій публікації показано, що дискретне перетворення Фур'є простого обсягу може зводитись до обчислення через циклічну згортку. Важливість публікації полягала у тому, що показувала можливість приведення ядра ДПФ до вигляду, що дає змогу під час організації обчислень зменшити обчислювальну складність перетворення. Подальшим розвитком алгоритму Рейдера ШПФ та швидких алгоритмів із використанням циклічної згортки вважають публікації Ш. Вінограда (S. Winograd). Розвиваючи підхід Гуда – Томаса [6, 7],

Віноград у 1976 р. [35] опублікував ефективний, але структурно складніший алгоритм, що зводить обчислення ДПФ до обчислення коротких згорток (з кількістю множень, приблизно в п'ять разів меншою, ніж в алгоритмі Кулі – Тьюкі). Вчений також розробив алгоритм Вінограда перетворення Фур'є (АВПФ), який можна подати в так званому гніздовому вигляді [36], де всі множення багатовимірного обчислення зосереджені в діагональній матриці D множників

$$X = I_2 \cdot D \cdot I_1 \cdot x, \quad (5)$$

де x, X – відповідно, вхідний і вихідний стовпці; I_1 – матриця розмірністю $(\mu \times N)$ з одиничними елементами, описує об'єднання вхідної послідовності; D – діагональна матриця множників $(\mu \times \mu)$; I_2 – матриця $(N \times \mu)$ з одиничними елементами, що визначає вихідні об'єднання; у загальному випадку $\mu > N$. “Гніздова” структура алгоритму Вінограда, порівняно з найкращими алгоритмами ШПФ, потребує на 80 % менше операцій множення з приблизно такою самою кількістю додавань [36].

Розвивались і здобули офіційне визнання унітарні ортогональні перетворення:

– загальне дискретне перетворення Фур'є (ЗДПФ, GDFT Generalized Discrete Fourier Transform) [37], що описується за формулою:

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp[-j2\pi(n+a)(k+b)/N], \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (6)$$

де a, b – дійсні числа зміщення, для різних значень та $a=0$ або $a=12$ та $b=0$ або $b=12$ розглядають чотири спеціальні форми ЗДПФ. Для $a=0$ та $b=0$ ЗДПФ зводиться до ДПФ за формулою (1). Чотири форми ЗДПФ за різних a, b називають типами I, II, III та IV відповідно.

– загальне дискретне перетворення Хартлі (ЗДПХ, GDHT Generalized Discrete Hartley Transform) [38], що описується формулою:

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos[(n+n_0)(k+k_0) \frac{2\pi}{N}], \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (7)$$

де n_0, k_0 – відповідні зміщення для типів ДПХ I-IV;

– вісім різних типів дискретних косинусних перетворень (ДКП) [39] та їх модифікацій, загальне подання різних видів ДКП записується у вигляді:

$$X^c(k) = \gamma_{k,n} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos \left[\frac{(2k+a)(2n+b)\pi}{4N} \right], \quad (8)$$

де $\gamma_{k,n}$ – відповідні масштабувальні множники, a, b – зміщення у загальному виразі (7) можуть набувати значень $a, b \in \{0, 1\}$ і визначають види перетворень, $x(n), X^c(k)$ – вхідна та вихідна послідовності перетворення ($k, n=0, 1, \dots, N-1$);

– вісім різних типів дискретних синусних перетворень (ДСП) [39], загальне подання різних типів ДСП записується у вигляді:

$$X^s(k) = \gamma_{k,n} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin \left[\frac{2(k+a)2(n+b)\pi}{4N} \right], \quad (9)$$

де $\gamma_{k,n}$ – відповідні масштабувальні множники, $a, b \in \{1/2, 1\}$ – коефіцієнти зміщення визначають тип

перетворень, $x(n)$, $X^*(k)$ – вхідна та вихідна послідовності дискретного синусного перетворення, $(k, n = 0, 1, \dots, N-1)$.

Вживатимемо термін *дискретні перетворення класу Фур'є*, що об'єднуюватиме всі перелічені вище унітарні ортогональні перетворення.

Дискретні косинусне / синусне перетворення ДКП і ДСП є подальшим розвитком ДПФ для дійсних вхідних даних, адже комплексне перетворення Фур'є у цьому випадку вносить надлишковість. ДКП-II широко використовують у багатьох прикладних сферах науки та техніки завдяки тому, що спектральна енергія сигналу перетворення сконцентрована у нижніх частотах інтенсивніше і обнулення решти вихідних значень не призводить до істотної втрати енергії сигналу. Дослідженню і використанню для оброблення відеоаудіоданих швидких алгоритмів ДКП і ДСП з початку 90-х років розробники приділяють значну увагу.

Становлення апаратних засобів обчислення ШПФ. Взаємодоповнювальний вплив алгоритму Кулі–Тюкі обчислення ДПФ на становлення високопродуктивних обчислювальних апаратних засобів має важливе значення. З появою ШПФ почали створюватись спеціалізовані апаратні засоби для реалізації перетворень [40]. Для вибору апаратної реалізації алгоритму ШПФ необхідно мати критерії вибору (мінімізація часу виконання, об'єм обладнання, вартість розробки). Спеціалізовані обчислювачі, які ґрунтувались на апаратній реалізації комплексних операцій, могли забезпечити необхідні високі вимоги з виконання ШПФ, на відміну від універсальних цифрових обчислювальних машин того часу. В основу перших спеціалізованих апаратних засобів була покладена схемна організація обчислень, за якої всі керуючі сигнали для блоків та елементів пристрою перетворення були чітко фіксовані. Прикладом першої тогочасної апаратної реалізації (1971 р.) є швидкодіючий цифровий процесор FDP (Fast Digital Processor) Лінкольнівської лабораторії [41] та його модернізація LSP2 (Lincoln Signal Processor 2) з найновішою тогочасною елементною базою. Апаратна реалізація визначалась на основі вибраного алгоритму ШПФ і перехід від однієї реалізації до реалізації алгоритму ШПФ іншого обсягу практично потребував побудови нового обчислювального пристрою. Специалізація структури обчислювальної системи у той час приводила до зменшення швидкості виконання інших алгоритмів. Тому для вирішення протиріччя між швидкодією та гнучкістю роботи пристроїв почали застосовувати програмну реалізацію обчислень. У програмній реалізації обчислень, за рахунок можливості виконання різноманітних послідовностей команд, можна за тієї самої схемної організації реалізувати різні алгоритми. Однак апаратні можливості і набір команд іноді більше відповідають одним алгоритмам і перешкоджають ефективній реалізації інших. Тому виникла нагальна необхідність у нових рішеннях під час апаратної реалізації спеціалізованих обчислювальних засобів з метою підвищення продуктивності виконання перетворень. Саме розвиток нових методів та технічних можливостей для прискорення виконання ШПФ визначив архітектурні особливості сучасних мікропро-

цесорів. У книзі [42] узагальнено основні методи, спрямовані на підвищення продуктивності спеціалізованих пристроїв:

- організація конвеєрних обчислень, тобто одночасне виконання арифметичних операцій, звернень до пам'яті та операцій над командами, на основі перекриття циклів звертання до пам'яті та циклів виконання арифметичних операцій, оскільки ці дії виконуються різними блоками;
- введення надоперативної пам'яті, тобто доповнення основної пам'яті запам'ятовуючим пристроєм невеликого об'єму із більшою швидкодією;
- розпаралелення арифметичних операцій завдяки збільшенню основи ШПФ алгоритму, що дає змогу виконувати декілька арифметичних операцій одночасно, та реалізації множення в окремому блоці;
- за певної адресації коефіцієнти та інші операнди не потрібно вибирати з пам'яті для кожної базової операції, оскільки вони можуть бути однаковими впродовж декількох циклів і міститимуться у спеціалізованих буферних регістрах арифметичного блока;
- узгодження роботи в часі арифметичного блока та пам'яті, адже у разі зменшення швидкодії одного з цих пристроїв загальна швидкодія системи знизиться, для цього рекомендують створення декількох блоків пам'яті з багатоканальним доступом;
- паралельне керування адресацією, пам'яттю та обчисленнями на основі багатоцільових команд;
- поточне виконання ШПФ у спеціалізованій структурі, що містить набір арифметичних пристроїв;
- надпаралелізм у спеціалізованій обчислювальній структурі, що містить великий набір арифметичних пристроїв, порівняно з поточною організацією виконання (збільшення об'єму обладнання);
- введення процесора ШПФ до складу периферійного обладнання універсальної ЕОМ, де велика частина обчислень виконується у швидкодіючому процесорі, а на ЕОМ покладається завдання введення / виведення опрацьованої інформації.

Поява ШПФ Кулі – Тюкі збігається із початком розвитку інтегральних електронних технологій. Замість традиційного методу виготовлення функціональних вузлів складанням із готових електронних елементів у модулі з використанням з'єднань між ними ці процеси об'єднання в функціональну конструктивно завершену структуру сумістились. Характерною позитивною особливістю інтегральної технології є високий рівень мініатюризації, що характеризують кількістю елементів на кристалі (упакування елементів у 1 см^2). Інтегральна технологія змінила принципи побудови оптимальних функціональних структур електронних пристроїв. Адже

істотно зменшилась кількість з'єднань у пристроях через високу функціональну складність самих інтегральних мікросхем, що дало можливість підвищити надійність та швидкодію. Однак це призвело до зростання питомої потужності розсіювання; підвищення рівня упакування елементів збільшує електромагнітний зв'язок між елементами, що призводить до зниження стійкості режимів роботи вузлів; мікросхеми з підвищенням ступеня інтеграції утруднюють виготовлення малорозмірних корпусів із великою кількістю виводів. Однак підвищення рівня інтеграції мікросхем стало прогресивним напрямом, що дало змогу підвищити функціональні та експлуатаційні показники пристроїв опрацювання інформації, зокрема апаратних засобів ШПФ.

Річард Хаммінг (Richard Hamming), дослідник із Bell Laboratories, помітив, що кількісна зміна величини на порядок приводить до якісної зміни. Тому діапазон вимог до пристроїв виконання ШПФ на базі інтегральних схем став достатньо великим. Промислове виробництво мікросхем певного типу доцільне лиш за умови їх масового використання. Тому всі ідеї щодо підвищення продуктивності ввібрали в себе універсальні мікропроцесори, на розвиток яких було спрямовано значні капітальні вкладення, завдяки широко-масштабному застосуванню. У 1971 р. з'явився перший мікропроцесор на одній мікросхемі. Поява надвеликих інтегральних схем (NBIC) у 80-ті роки дала змогу поміщати на одну плату спочатку десятки тисяч, потім сотні тисяч і, нарешті, мільйони транзисторів (UBIC).

Створення інтегральних спеціалізованих мікроархітектур цифрових сигнальних процесорів для виконання дискретного перетворення класу Фур'є на початку 80-х років виокремилось у напрям процесорів опрацювання сигналів (Digital Signal Processor). Таке виокремлення зумовлене неможливістю або неефективністю застосування для розв'язання задач цифрового опрацювання сигналів універсальних мікропроцесорів, з одного боку, та, з іншого боку, їх низькою продуктивністю під час виконання спеціальних алгоритмів опрацювання через надмірну надлишковість для задач виконання ШПФ. Для опрацювання великих об'ємів даних у режимі реального часу висока продуктивність процесорів опрацювання сигналів досягається завдяки специфічній архітектурі та проблемно-орієнтованій системі команд. У них широко використовують методи скорочення тривалості командного такту, такі як: конвеєризація на рівні окремих мікрокоманд та команд, використання тіньових регістрів для збереження стану обчислень, розподіл пам'яті команд та даних, введення команд та відповідних вузлів для виконання специфічних операцій опрацювання сигналів, наприклад множення із накопиченням (multiply-accumulate, MAC)). Особливості архітектури цифрових сигнальних процесорів визначались конкретними алгоритмами ШПФ. Сучасні мікропроцесори опрацювання сигналів утворюють два класи, що істотно відрізняються за вартістю: мікропроцесори опрацювання даних у форматі з фіксованою крапкою, мікропроцесори

опрацювання даних, які підтримують операції в форматі з плаваючою крапкою. Висока складність функціональних пристроїв, притаманна опрацюванню даних у форматі з плаваючою крапкою, потребує складних технологій виробництва мікросхем і, відповідно, впливає на вартість процесора. Виробники NBIC мікросхем для цифрового опрацювання сигналів, що випускали різноманітний набір пристроїв, орієнтованих на широке коло задач дискретного перетворення [43], стали згодом найпотужнішими світовими компаніями (Motorola, Intel, Texas Instruments).

У середині 80-х років на зміну CISC (Complex Instruction Set Computer) мікропроцесорам з повним набором команд прийшли RISC (Reduced Instruction Set Computer) мікропроцесори зі зменшеним набором команд. Тобто не так важливо, як довго виконується та чи інша команда, а важливо, скільки команд за секунду може бути запущено. Як аргумент твердили, що, навіть якщо системі RISC доводиться виконувати чотири або п'ять команд замість однієї, яку виконує CISC, то RISC все одно виграє за швидкістю. RISC-команди виконуються у десять разів швидше (оскільки вони не інтерпретуються).

В 90-ті роки з'явились суперскалярні процесори, які могли виконувати багато команд одночасно, часто не в тій послідовності, в якій вони розміщені в програмі. Суперскалярний підхід реалізовував притаманний мікропроцесорам внутрішній паралелізм, що забезпечував отримання в одному такті декількох скалярних результатів. Подальший розвиток паралелізму на рівні команд полягав у застосуванні підходу VLIW (Very Long Instruction Words). З кожним роком стрімко зростає кількість транзисторів на одній мікросхемі, що приводить до нових досягнень у розвитку інших компонентів для комп'ютерних систем. Наприклад, компанія Intel зуміла втілити всі попередні ідеї в своїй архітектурі. Процесори Intel, починаючи з процесора 486, містять RISC-ядро, яке виконує найпростіші та найпоширеніші команди за один цикл у тракту даних, а за звичайною технологією CISC інтерпретуються складніші команди. Хоча за такого "гібридного" підходу продуктивність нижча, ніж в архітектурі RISC, нова архітектура мала певні переваги, оскільки дає змогу використовувати широкий спектр програмного забезпечення без зміни. Назва "персональний" комп'ютер з процесорами Intel відділяє їх від машин, оснащених високопродуктивними RISC-мікросхемами. В принципі, особливої відмінності між цими двома типами машин немає. Отже, у структурі усіх сучасних комп'ютерних засобів є спільні властивості [44], що сформувались в ході становлення, починаючи від вимог, визначених швидкими алгоритмами, а також індивідуальні властивості в архітектурі, що визначаються сферою їх найширшого застосування.

Сучасний розвиток програмного забезпечення надає високоефективні засоби реалізації алгоритмів цифрового опрацювання сигналів. Досягнутий загальний

рівень аналізу та програмного розроблення швидких алгоритмів охоплює різні версії ефективних алгоритмів дискретного перетворення класу Фур'є. Шквал досліджень алгоритмів ШПФ та програмних технологій дав можливість розвинути теорію та розроблення спеціальних мов для опрацювання сигналів. Це дало змогу розробити програмне забезпечення для генерації ефективних алгоритмів ШПФ у сучасних програмних бібліотеках FFTW [45], SPIRAL [46], CuFFT [47], MKL [48], IPP [49], Nukada FFT [50], які забезпечують широкий вибір швидких алгоритмів для різних апаратних обчислювальних платформ. У 1997 р. Фріго та Джонсон розробили програму, яку вони назвали FFTW (Fastest Fourier Transform in the West) [51], що є поєднанням багатьох ідей із різних алгоритмічних підходів. Бібліотека FFTW отримала премію Вілкінсона за числове програмне забезпечення 1999 р. за досягнутий результат у створенні надійної та дуже швидкої програмної системи для обробки даних на різних комп'ютерних платформах та цифрових сигнальних процесорах [52].

Розроблення засобів ШПФ у львівських науково-дослідних установах / Development of FFT means in Lviv research institutions

В ОКБ ЕІВТ ЛПІ, ще до появи швидкого алгоритму Кулі – Тюкі обчислення перетворення Фур'є, науковий співробітник Михайло Розенблат почав розробляти цифровий спектроаналізатор, здатний виконувати цифрові обчислення над відліками сигналу, які створював аналого-цифровий перетворювач. Упродовж 1968–1974 рр. за його безпосередньої участі розроблено і виготовлено спектроаналізатори БПФ-I та БПФ-2 інфразвукових та звукових частот.

Спектроаналізатор БПФ-I давав можливість обчислювати поточні комплексні й амплітудні спектри, а також оцінювати спектральну густину потужності випадкових процесів. Основні технічні характеристики приладу:

- частотний діапазон 0,05–2560 Гц;
- шість піддіапазонів із верхніми частотами f_e , за якими визначали частоту дискретизації сигналів $f_d = 3,2 f_e$;
- крок переналаштування за частотою $-f_e/320$;
- динамічний діапазон більше ніж 50 дБ;
 - похибка за синусоїдального вхідного сигналу менше ніж 1 дБ;
 - час обчислення 320 точок спектрограми – 0,8 с.

Спектроаналізатор БПФ-2 був призначений для ширшого кола завдань, зокрема аналізу в реальному часі сигналів до 300 Гц та визначення взаємного спектра двох дійсних сигналів. Технічні характеристики:

- частотний діапазон – 0,1–13 кГц;
- шість піддіапазонів із верхніми частотами f_e ,
- частота дискретизації сигналів $f_d = 20,48 \times 2^m \times 10^n$, де $m = 0,1,2$; $n = 0,1,2,3$;

- крок переналаштування за частотою $-f_e/2$, де $k = 9,10,11,12$;
- динамічний діапазон більше ніж 50 дБ;
- похибка за синусоїдального вхідного сигналу менше ніж 1 дБ;
- час обчислення для $k=10$ спектрограми – 0,3 с.

Універсальність, простота обслуговування і транспортабельність спектроаналізаторів БПФ-I та БПФ-2, можливість безпосереднього введення аналогових сигналів, наявність зручних індикаторів та ресстраторів, а також зв'язок із ЕОМ дали змогу з успіхом використовувати їх для наукових досліджень, наприклад, для вивчення впливу слабого магнітного поля на електричну активність головного мозку людини, пульсації тиску в конденсаційному інжекторі тощо.

У 1977 р. Михайло Розенблат захистив кандидатську дисертацію на тему “Алгоритмічні та апаратні методи підвищення ефективності спектроаналізаторів, що використовують швидке перетворення Фур'є” [53]. Серед наукової новизни роботи – розвиток методики факторизації косинусної (синусної) матриці Фур'є з одержанням нових косинусно-синусних алгоритмів КСА-I, КСА-II, що забезпечують економію кількості множень, а також пам'яті у випадку перетворення дійсних векторів. КСА-I рекомендовані для універсальних ЕОМ, КСА-II – для швидкодіючих спецпроцесорів. КСА характеризуються мінімальною кількістю дійсних множень у базовій операції. Розроблено підхід побудови КСА на основі факторизації матриць для косинусної та синусної частин ДПФ. Показано, що матриця кожної із частин подається у вигляді добутку ортогональних і неортогональних елементарних матриць, у будь-якому рядку яких містяться не більше від двох ненульових елементів, що дорівнюють за модулем одиниці, й $k-2$ діагональних матриць, кожна з яких містить не більше ніж 2^{k-2} відмінних від нуля та одиниці елементів. На основі опису ШПФ у вигляді факторизації матриць подано діаграми потоку даних для 16-точкових алгоритмів КСА-I, КСА-II. Досягнуто перевагу за часом виконання для 1024-точкового перетворення ШПФ дійсного вектора на ЕОМ ЕС-1020 алгоритму КСА-I порівняно із відомими алгоритмами ШПФ. В КСА-II, порівняно з алгоритмом Кулі – Тюкі, більше різнотипових елементарних операцій і складніші перестановки, проте в певних базових операціях вдвічі менше дійсних множень. КСА-II дає змогу перетворювати дійсний вектор з використанням вдвічі меншої оперативної пам'яті та кількості елементарних операцій [54, 55].

Старший науковий співробітник, канд. техн. наук Михайло Розенблат – автор та співавтор понад 40 наукових праць, зокрема десяти винаходів. У наукових дослідженнях, розробках та публікаціях разом з М. Ш. Розенблатом брали участь А. М. Агізім, І. М. Вишенчук, Я. М. Гнатів, В. С. Муратов, Ю. М. Опір, С. Є. Сас, В. А. Свірцев, В. В. Троценко, Б. Й. Швецький, О. Є. Фріш. Розвиток апаратного спе-

ктрального аналізу в ОКБ ЕІВТ продовжувався, у 1976–1982 рр. прилади розробляли, переробляли, виготовляли, налагоджували та випробовували. В ОКБ ЕІВТ ЛПІ було створено три – чотири модифікації спектроаналізаторів, виготовлення яких завершувалось передаванням серійної документації на дослідний завод “Еталон” у Києві. Випуск серійних аналізаторів спектра (рис. 2) (приблизно 200 зразків) із параметрами, що перевищували характеристики аналізаторів всесвітньо відомої фірми “Brüel&Kjaer” (Данія), розпочався у 1983–1984 рр.

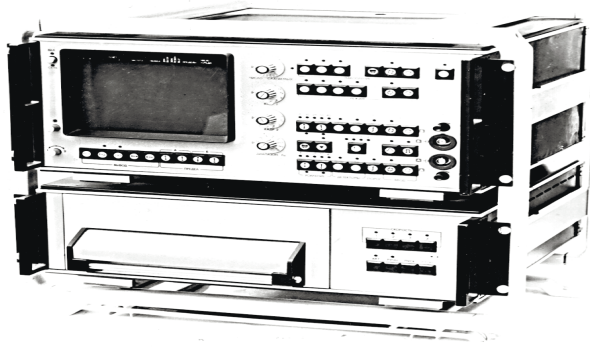


Рис. 2. Серійний двоканальний цифровий спектроаналізатор БПФ-2М / Serial dual-channel digital spectrum analyzer БПФ-2М

Розвиток обчислювальної та електронної техніки в наступні роки спонукав до подальшого як алгоритмічного, так і архітектурного вдосконалення спектроаналізаторів, створених в ОКБ. Наукові співробітники ОКБ ЕІВТ В. Кравцов, О. Васіна, В. Муратов розробили та виготовили на дослідному виробництві НДКІ із застосуванням НВІС спеціалізований обчислювач літакової радіолокаційної станції для дослідження природних ресурсів на основі алгоритму Гуда – Вінограда. Апаратуру та алгоритми переробляли кілька разів, експериментальний зразок виготовили, налагодили і передали замовникові, однак через розпад СРСР фінансування НДР припинилось.

У Львівському науково-дослідному радіотехнічному інституті (ЛНДРТІ) здійснювали дослідження і розроблення спецпроцесорів ШПФ для радіолокаційних станцій із середини 80-х років. За алгоритмічну реалізацію швидких перетворень відповідав **Михайло Яцимірський** (1954–2025), який пройшов шлях від інженера-математика, наукового співробітника до керівника сектора у цій науково-дослідній установі. Під час роботи в ЛНДРТІ М. Яцимірський брав безпосередню участь в НДР “Процесор” – “Дослідження технічних шляхів побудови апаратури обробки сигналів”, ДКР “Зубр” – “Малогабаритна екологічно чиста РЛС для цілодобового контролю місцевості за різних погодних умов”, НДР “Екотом-П” – “Дослідження шляхів створення і принципів побудови багатоцільового комп’ютерного томографа”, ДКР “Реконверсія-2” – “Розробка комплексу спеціалізованих НВІС для високопродуктивних систем ЦОС” як відповідальний виконавець або заступник наукового керівника.

За результатами досліджень та розробок М. М. Яцимірський у 1990 р. захистив кандидатську дисертацію на тему “Адаптивні алгоритми частотно-часового перетворення сигналів у інформаційно-вимірювальних системах”. Наступні його дослідження та публікації стосувалися швидких алгоритмів ДПХ та ДПФ [56, 57].

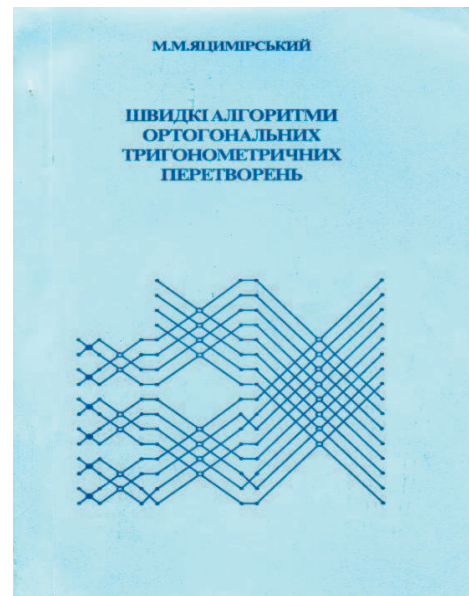


Рис. 3. Монографія М. М. Яцимірського / Monograph by M. M. Yatsymirskyi

З 1995 р. М. М. Яцимірський перейшов на викладацьку роботу у Львівську політехніку. У 1997 р. канд. техн. наук М. М. Яцимірський опублікував монографію “Швидкі алгоритми ортогональних тригонометричних перетворень” (рис. 3). Монографія містила п’ять розділів, в яких для опису алгоритмів ШПФ використано алгебраїчну та графічну форми. У ній розглянуто типи алгоритмів ШПХ, алгоритми ШПФ дійсної та комплексно-спряженої послідовностей, алгоритми швидкого косинус- та синус-перетворення Фур’є. За результатами подальших досліджень та розробок М. М. Яцимірський захистив докторську дисертацію на тему “Алгоритмічні основи комп’ютерних засобів спектрально-кореляційної обробки сигналів та зображень” у 1998 р. Важливим науковим доробком вченого є дослідження структур НВІС-процесорів швидких косинус- і синус-перетворень Фур’є. Вибір як базових дискретного косинус-перетворення Фур’є (ДКПФ) і дискретного синус-перетворення Фур’є (ДСПФ), а також розроблення ним відповідних швидких алгоритмів (ШКПФ і ШСПФ) забезпечує безнадлишкове виконання ДПФ і ДПХ комплексної, дійсної, комплексно-спряженої, парної або непарної послідовності. У загальному науковому доробку М. М. Яцимірського понад 150 наукових праць, зокрема монографія, понад сто статей у фахових та міжнародних виданнях, вісім авторських свідоцтв.

У Фізико-механічному інституті ім. Г. В. Карпенка Національної академії наук України у 80-ті

роки здійснювали дослідження і розробки широко затребуваних на той час цифрових спектральних аналізаторів. У секторі “Фізикометрії” дослідження з реалізації дискретного перетворення Фур’є з дельта-модуляцією (ДМ) виконував науковий співробітник Володимир Погрібний (1938–2012). У своїх працях [58, 59] у 80-ті роки В. Погрібний виконав порівняння структур спецпроцесорів для ДПФ з дельта-модуляцією та ІКМ (імпульсно-кодовою модуляцією). Порівняно з ЦОС ІКМ методи на основі ДМ складніші та незначно поступаються пристроям з ІКМ за шириною смуги частот сигналів опрацювання через вищу частоту дискретизації, однак забезпечують економічніші реалізації [60].

Структурним підрозділом Фізико-механічного інституту ім. Г. В. Карпенка НАН України було Спеціальне конструкторсько-технологічне бюро (СКТБ), проміжна ланка між науковими дослідженнями та дослідним виробництвом. Упродовж 1979–1984 рр. у ФМІ у межах проєкту “Інтершок” був розроблений бортовий цифровий спектроаналізатор “ВАР” під загальним керівництвом д-ра техн. наук, проф., зав. відділу № 29 Михайла Ракова. Безпосередніми виконавцями були: канд. техн. наук, ст. наук. співр. відділу № 29 Ярослав Дуб, канд. техн. наук, зав. відділу № 119 СКТБ ФМІ Олександр Ланцов, головний конструктор проєкту Вячеслав Дмитрієнко, зав. сектору відділу № 119 Роман Дунець, провідний конструктор Володимир Глемба та інженер III кат. Сергій Каліберда з цього сектору.

Спектроаналізатор “ВАР” входив до складу апаратури для дослідження низькочастотних флуктуацій електричного та магнітного полів, а також потоку іонів плазми, що виникають у магнітосфері Землі. Він забезпечував виявлення частот у діапазоні 0,1–100 Гц у трьох піддіапазонах. На вхід надходили аналогові сигнали від давачів магнітного поля, електричного поля та потоку плазми. Інформація про спектр передавалася як у штатну телеметричну систему, так і у спеціалізований комп’ютер “БРОД”, який формував ознаки перетину супутником ударної хвилі та забезпечував швидке опитування давачів.

Спектроаналізатор “ВАР” був реалізований на мікросхемах 564 серії, яка виготовлена за КМОН-технологією та має гарантовані характеристики в діапазоні температур від –60 до +125 °С, стійка до стателектрики, характеризується низькою потужністю споживання. Виводи мікросхем на платах з’єднували спеціальною технологією провідного монтажу, що забезпечувало максимальну щільність розташування мікросхем на платах, а, відтак, мінімальний об’єм спектроаналізатора загалом. Загальний вигляд ВАРу разом із контрольною апаратурою КІА-ВАР показано на фото (рис. 4).

Супутник “Прогноз-10” (“Інтеркосмос-23”) зі спектроаналізатором “ВАР” на борту запущений з

Байконура 26 квітня 1985 р. на орбіту з апогеєм 200 000 км, перигеєм 400 км, нахилом 65 ° і періодом обертання 96 годин. Наукові дані одержували до листопада 1985 р. Супутник зійшов з орбіти у січні 1994 р. На честь успішного виконання проєкту “Інтершок” випустили поштовий конверт, який наведено на рис. 5, з підписами розробників бортового цифрового спектроаналізатора “ВАР”.

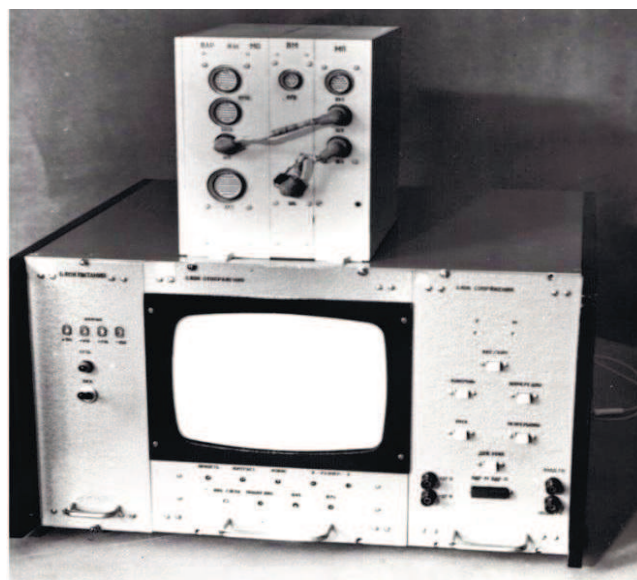


Рис. 4. Бортовий цифровий спектроаналізатор “ВАР” (вверху) разом із контрольною апаратурою КІА-ВАР (внизу) / On-board digital spectrum analyzer “VAR” (above) together with control equipment KIA-VAR (below)



Рис. 5. Поштовий конверт з емблемою проєкту “Інтершок” та підписами розробників бортового цифрового спектроаналізатора / Postal envelope with the emblem of the Intershock project and the signatures of the developers of the onboard digital spectrum analyzer

Наукові публікації за такими проєктами не здійснювали, але описи окремих технічних рішень наводили у авторських свідоцтвах на винаходи [61]. Результатом реалізації спектроаналізатора “ВАР” на мікросхемах 564 серії стала книга канд. техн. наук Олександра Ланцова “Цифрові пристрої на компонентарних МДП інтегральних мікросхемах” (рис. 6), яку видало у 1983 р. видавництво “Радіо та зв’язок”.



Рис. 6. Книжка О. Ланцова – одного з розробників бортового цифрового спектроаналізатора “ВАР” / Book by O. Lantsov, one of the developers of the onboard digital spectrum analyzer “VAR”

У книзі розглянуто особливості застосування мікросхем, виготовлених за КМОП технологією, серій: K176, K561, 564. Висвітлено функціональні можливості КМОП інтегральних схем та надано загальні рекомендації щодо їх застосування під час синтезу комбінаційних схем. Наведено приклади типових рішень побудови арифметичних, запам'ятовуючих, керуючих

та інших пристроїв, довідкову інформацію щодо роботи цих мікросхем.

Після успішного завершення проєкту “Інтершок” у відділі № 131 СКТБ ФМІ під керівництвом Олександра Ланцова розпочалась НДР над розробленням векторного спецпроцесора ШПФ у 1985 р. Іншими безпосередніми виконавцями розробки були: інженер Ігор Процько, інженер-конструктор I кат. Сергій Углянський, частково брали участь у розробленні високопотужного блока живлення провідний науковий інженер Віталій Телков та старший інженер-програміст Ярополк Пізюр.

Векторний спецпроцесор ШПФ був реалізований на мікросхемах K531 серії, які виготовлені за біполярною технологією з діодами Шотткі та мають гарантовані характеристики в діапазоні температур від 10 до +70 °С, з підвищеною швидкістю: 5÷6 нс, та, відповідно, високою потужністю споживання. Виводи мікросхем на платах з'єднували спеціальною технологією навісного провідного монтажу, що забезпечувало максимальну щільність розташування мікросхем на платах, а, відтак, мінімальні розміри конструкції спецпроцесора. Загальний вигляд векторного спецпроцесора ШПФ показано на рис. 7. У конструкцію спецпроцесора входили три основні модулі, кожен модуль містив плати, які компактно складались в книжку, були ще два модулі для забезпечення живлення та стикування з ЕОМ.

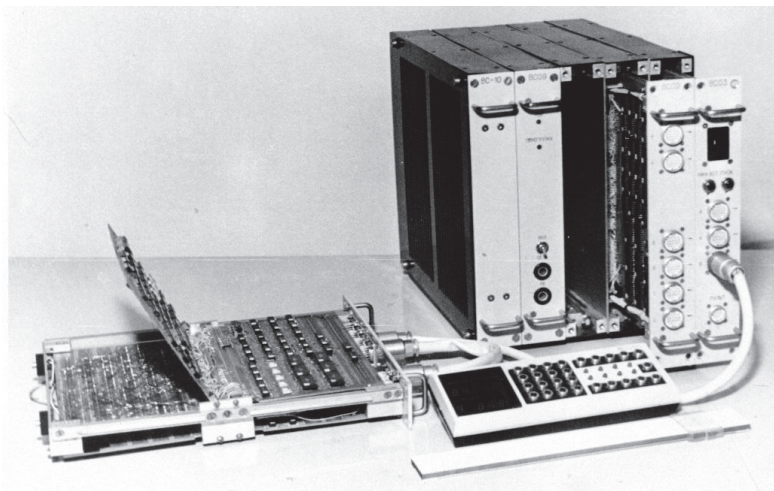


Рис. 7. Векторний спецпроцесор ШПФ / Vector special FFT processor

В основу роботи спецпроцесора ШПФ була покладена концепція реалізації обчислень під керуванням потоку даних. Планували, що розробка на основі цієї концепції переросте у наступних проєктах у високопродуктивну однорідну обчислювальну систему. Реалізація обчислень під керуванням потоку даних здійснювалась за допомогою кадрів (табл. 1) із наперед визначеною структурою.

Відповідно до табл. 1, позначення у структурі кадру такі: ϕ – код програми; σ_1 – біт запису кадру в ОЗП1 або ОЗП2 каналів; σ_2 – біт вибору адресації (лічильник або формувач); σ_3 – біт про запис даних (суцільний або

почерговий); M1 M2 – маркери даних у кадрі (11–керуючі дані, 01 – вивід з фіксацією початкової адреси, 10 – ввід з фіксацією початкової адреси); D(1), D(2),... D(N) – 16-розрядні дані у форматі з плаваючою крапкою (4 розряди – експонента зі знаком, 12 розрядів – нормалізована мантиса зі знаком).

У структурну схему векторного процесора (рис. 8) входять блоки:

БК1, БК2 – блоки каналів, на які подаються інформаційні кадри A1 та A2 і в яких залежно від коду ϕ здійснювалось подальше опрацювання кадрів;

БП1, БП2 – блоки пам'яті (4K×16);

БС1, БС2 – блоки синхронізації роботи каналів через БУ;

БУ – блок управління, реалізований за допомогою мікропрограмного принципу;

БН – блок налаштування БА (блок арифметики);

БВ – блок виводу.

Блок арифметики складається з ВД вузла додавання та ВМ вузла множення, що виконують операції з плаваючою крапкою над 16-розрядними операндами X1, X2, X3. За допомогою комутаторів із БП 1,2 подавались дані X1, X2, X3, що формувались як операнди для виконання базових операцій алгоритму ШПФ (табл. 2).

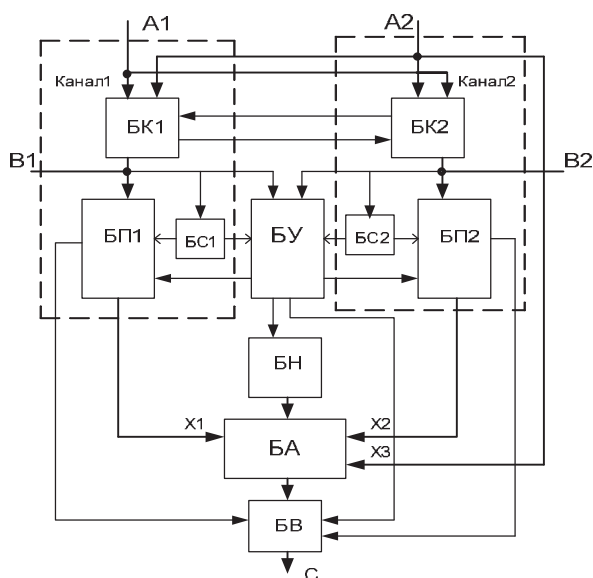


Рис. 8. Структурна схема векторного процесора / Structural diagram of vector special FFT processor

Табл. 1. Структура вхідного кадру / Input frame structure

φ	σ ₁	σ ₂	σ ₃	...	M ₁ M ₂
		D(1)			
		D(2)			
		D(3)			
		...			
		D(N)			

Табл. 2. Структури базових операцій БА / Basic operations structures of AU

X ₁ X ₂	Структура
0 0	X ₁ + X ₂
0 1	(X ₁ + X ₂) · X ₃
1 0	(X ₁ · X ₂) + X ₃
1 1	(X ₁ · X ₂)

У блоці виведення БВ формувалася вихідний кадр зі структурою (табл. 1), що містить результати виконання із новим рядком керуючих даних. Сформований кадр зберігався для подальшого обчислення за алгоритмом ШПФ у векторному спецпроцесорі. Використовували алгоритм обчислення ШПФ обсягом $N = 256$ за основою 4 з децимацією в часі, що описувався формулою

$$X(m_1, m_2, m_3, m_4) = \sum_{l_1=0}^3 W_N^{4m_1 l_1} (W_N^{m_1 l_1} \sum_{l_2=0}^3 W_N^{4m_2 l_2} \times$$

$$\times (W_N^{m_2 l_2} \sum_{l_3=0}^3 W_N^{4m_3 l_3} (W_N^{m_1 l_1} \sum_{l_4=0}^3 x(l_4, l_3, l_2, l_1) W_N^{4m_4 l_4}))); \quad (10)$$

де $W_N^{kn} = \exp(-j 2\pi kn / NT)$, $m_1, m_2, m_3, m_4 = 0, 1, \dots, 3$.

Формула (10) дає змогу обчислювати ДПФ за допомогою вкладених чотириточкових ДПФ, базисна матриця яких містить $\pm 1, \pm j$. Кожна частина виконує швидкий алгоритм ДПФ і перемножується повертаючими множниками $W_N^{l_i k_i}$ (twiddle factors), де $(i = 0, 1, 2, 3)$. Вибраний алгоритм дає змогу ефективно реалізувати ШПФ для розробленої платформи.

Для реалізації алгоритму необхідно було розробити систему мнемкоманд та компілятор, що переводив їх у машинні коди, прив'язані до закладених у векторному процесорі принципів. У кінці 80-х років “страна розв’язаного соціалізму” тріщала по швах. Незважаючи на обмежене фінансування проекту, завдяки неймовірним зусиллям виконавці налагодили та протестували модулі векторного спецпроцесора ШПФ, залишався останній етап налагодження обчислювальної системи загалом. Подальших фінансових і кадрових ресурсів для продовження робіт не виділили. У 1988 р. проект, в якому було використано оригінальні ідеї, підтверджені сімома авторськими свідоцтвами на винахід [62, 63], закрили.

Один з виконавців проекту, інженер І. Процько перейшов працювати в НДЛ Львівської політехніки, де продовжував роботу над дослідженнями алгоритмів швидкого перетворення Фур’є. Захистив кандидатську дисертацію на тему “Засоби швидкого перетворення Фур’є послідовностей довільного обсягу”. Подальші його дослідження стосувалися швидких алгоритмів дискретних косинусних / синусних перетворень, які широко використовували в обробленні відео- та аудіосигналів. ДКП і ДСП є подальшим розвитком ДПФ в арифметиці дійсних чисел, адже комплексне перетворення Фур’є вносить надлишковість у цьому випадку. Після 2010-х років І. Процько розробив загальний підхід до обчислення тригонометричних перетворень довільного обсягу N на основі циклічних згорток. Більшість відомих підходів із метою створення ефективних алгоритмів для формування циклічних послідовностей у базисах перетворень використовують примітивні корені для простого або аналітичні перетворення для конкретних значень обсягів перетворення. Загальну методику ефективного обчислення дискретного перетворення класу Фур’є для послідовностей довільного обсягу на основі циклічних згорток І. Процько описав у роботах [64–67]. За методикою формується циклічний розклад підстановки, який визначає розподіл гармонічного ядра перетворення на множину циклічних підматриць і стисло описує структуру блочно-циклічного ядра перетворення. На основі підстановок рядків або стовпців матриці цілочислових аргументів базисної функції визначається циклічний розклад підстановки у вигляді

$$H(L) = (m_{11}, m_{12}, \dots, m_{1L_1}) (m_{21}, m_{22}, \dots, m_{2L_2}) \dots (m_{t1}, m_{t2}, \dots, m_{tL_t}), \quad (11)$$

де $L = (L_1 + L_2 + \dots + L_t)$ – довжина циклічного розкладання, L_i – довжина циклів, t – кількість циклів, $m_{ij} < N$ – цілочисловий елемент циклу.

Наукові школи Північно-атлантичного об'єднання університетів та наукове товариство ІЕТ у Великобританії апробували й опублікували на перших сторінках журналів з обробки сигналів загальну методику для ДКП I-IV [64] та ДПХ I-IV [65]. У 2019 р. канд. техн. наук І. Процько захистив докторську дисертацію на тему “Підвищення ефективності обчислення дійсних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток” у Вінницькому НТУ. Обґрунтування та особливості формування циклічного розкладу підстановки для блочно-циклічного структурування ядра перетворення

детально описано в журналі “Кібернетика та системний аналіз”, який видає Інститут кібернетики АН України [66]. Синтезовані алгоритми, які використовують блочно-циклічне структурування ядра перетворення, ефективно реалізуються на основі програмного забезпечення та апаратних рішень в інтегральних схемах, особливо для перетворень короткої довжини. Наприклад, блочно-циклічне структурування для ДПХ-I обсягу $N=21$ за допомогою двох різних циклічних розкладів підстановок $H_1(21)$, $H_2(21)$ забезпечує формування ядра перетворення у вигляді, поданому на рис. 9.

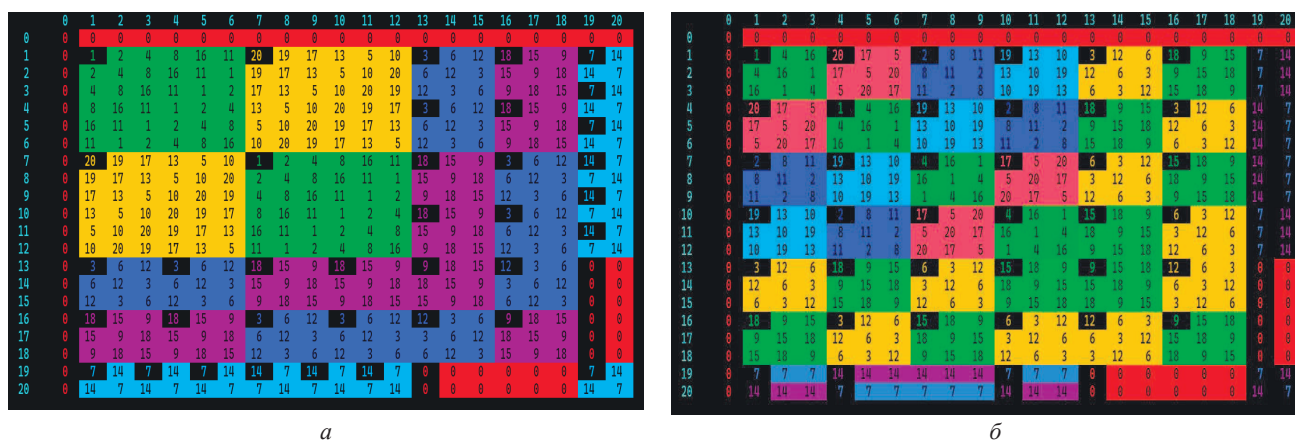


Рис. 9. Приклад структурування базису ДПХ-I для $N=21$ з цілочисловими аргументами за допомогою двох різних циклічних розкладів підстановок $H_1(21)$ (a) і $H_2(21)$ (б)

Табл. 3. Середній час виконання програм ДПХ-I обсягу $N = 21$ на сучасних комп'ютерних платформах, мікросекунд / The average times (microseconds) of programs execution of 21-point DHT on modern computer platforms

Платформа	DHT_ H_1	DHT H_1 _AVX2	DHT_ H_2	DHT H_2 _AVX2	DHT_FFTW
Intel®Core™i9-13900K	0,0271286	0,0205553	0,0304825	0,0158175	0,0347719
Apple Silicon M2 (3.6GHz)	0,0372436	—	0,0385520	—	0,0423068
RaspberryPI 4	0,2971200	—	0,3089461	—	0,3255271

Відповідно до табл. 3 для ДПХ-I обсягу $N = 21$ час виконання обчислення DHT H_2_AVX2 більш ніж удвічі менший ($0,0347719 \mu s / 0,0158175 \mu s \approx 2,2$) за методикою, що використовує циклічний розклад підстановки для синтезу швидких алгоритмів.

Тематика використання ШПФ актуальна для багатьох галузей науки і техніки від дослідження фізичних явищ до штучного інтелекту. Тому проблематикою швидких перетворень класу Фур'є займалися і продовжують дослідження не тільки науковці у Львові, але й науковці Харкова, Одеси, Києва та інших науково-дослідних установ України.

Висновки / Conclusions

Дослідження швидких перетворень класу Фур'є продовжує розвиватись у зв'язку зі зростанням складності прикладних завдань і, відповідно, вимог до мультифункціональності, швидкодії та економічності програмних або апаратних засобів їх реалізації. Багато високоефективних алгоритмів із використанням конкретних перетворень адаптовані до характеристик

обчислювальних засобів. Якісні та кількісні характеристики цих засобів постійно доповнюються та покращуються. Розробляються нові уніфіковані архітектури НВІС обчислювачів перетворень [68]. Деякі дослідження сконцентровані на розширенні швидких перетворень до складніших умов, таких як нелінійні або мультирозмірні сигнали, а також на оптимізації швидких алгоритмів для специфічних застосувань.

Особливу увагу до швидких перетворень класу Фур'є зумовило їх широке використання у згорткових нейронних мережах (ЗНМ). Перетворення класу Фур'є використовують: для інтеграції в архітектуру ЗНМ з метою виділення частотних характеристик сигналів і передавання їх до інших шарів [69], для застосування як окремого шару для виділення частотних ознак сигналів, які можуть бути корисними для розпізнавання, класифікації зображень [70], для реалізації компресії розміру вхідних даних, що може сприяти зменшенню обчислювальних витрат і підвищенню швидкості навчання моделі [71], [72], для розроблення нових моделей, наприклад DCTCNet [73].

Ефективні алгоритми обчислення перетворень класу Фур'є з часів алгоритму Кулі – Тюкі займають важливу нішу у величезному інформаційно-технічному просторі сучасних імплементацій. Адже вони забезпечують якісні параметри в частотному вимірі для опрацювання інформації щодо різноманітних фізичних явищ та процесів.

Подяка / Acknowledgment

Автори щиро вдячні директору Науково-дослідного конструкторського інституту ЕЛВІТ В. Ф. Ткаченку за надані матеріали про виконавців розробників цифрових спектроаналізаторів та опис технічних характеристик приладів, основаних на ШПФ. Щира подяка проф. І. Г. Цмоцю за інформацію про свого колегу із ЛНДРТІ, із яким вони пропрацювали разом більше ніж два десятиліття.

References

- [1] Cooley, J. W., & Tukey, J. W. (1965). An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Mathematics of Computation*, 19(90), 297–301. <https://doi.org/10.2307/2003354>
- [2] Cipra, B. A. (2000). The best of the 20th century: Editors name top 10 algorithms. *SIAM news*, 33(4), 1–2.
- [3] Heideman, M. T., Johnson, D. H., & Burrus, C. S. (1985). Gauss and the history of the FFT. *Archive for History of Exact Sciences*, 34(3), 265–277. <https://doi.org/10.1007/BF00348431>
- [4] Runge, C. (1903). On the decomposition of empirically given periodic functions into sine waves. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 48, 443–456.
- [5] Danielson, G. C., & Lanczos, C. (1942). Some improvements in practical Fourier analysis and their application to X-ray scattering from liquids. *Journal of the Franklin Institute*, 233(1), 45–52. [https://doi.org/10.1016/S0016-0032\(42\)90767-1](https://doi.org/10.1016/S0016-0032(42)90767-1)
- [6] Good, I. J. (1960). The interaction algorithm and practical Fourier analysis: An addendum. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 22(2), 372–375. <https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1960.tb00384.x>
- [7] Thomas, L. H. (1963). Using of computer to solve problems in physics. In R. E. Rosser (Ed.), *Applications of digital computers* (pp. 67–83). Boston: Ginn and Co.
- [8] Yates, F. (1937). The design and analysis of factorial experiments (Technical Communication No. 35). Harpenden, England: Imperial Bureau of Soil Science
- [9] Butler, J. L., & Lowe, R. (1961). Beam forming matrix simplifies design of electronically scanned antennas. *Electronic Design*, 9(8), 170–173.
- [10] Rabiner, L. R., & Gold, B. (1975). Theory and application of digital signal processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- [11] Oppenheim, A. V., & Schaffer, R. W. (1975). Digital signal processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- [12] Yuan, W., Hao, P., & Xu, C. (2006). Matrix factorization for fast DCT algorithms. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)* (Vol. 3, pp. 948–951). IEEE. <https://doi.org/10.1109/ICASSP.2006.1660812>
- [13] Malvar, H. S. (1986). Fast computation of discrete cosine transform through fast Hartley transform. *Electronics Letters*, 22(7), 352–353. <https://doi.org/10.1049/el:19860239>
- [14] Wang, Z.-D. (1982). A fast algorithm for the discrete sine transform implemented by the fast cosine transform. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 30(5), 814–815. <https://doi.org/10.1109/TASSP.1982.1163963>
- [15] Vetterli, M., & Nussbaumer, H. J. (1984). Simple FFT and DCT algorithms with reduced number of operations. *Signal Processing*, 6(4), 267–278. [https://doi.org/10.1016/0165-1684\(84\)90059-8](https://doi.org/10.1016/0165-1684(84)90059-8)
- [16] Lee, B. G. (1989). Input and output index mappings for a prime-factor decomposed computation of discrete cosine transform. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 37(2), 237–244.
- [17] Pollard, J. M. (1971). The fast Fourier transform in a finite field. *Mathematics of Computation*, 25(114), 365–374. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1971-0301966-0>
- [18] Rader, C. M. (1968). Discrete Fourier transforms when the number of data samples is prime. *Proceedings of the IEEE*, 56(6), 1107–1108.
- [19] Goertzel, G. (1958). An algorithm for the evaluation of finite trigonometric series. *The American Mathematical Monthly*, 65(1), 34–35.
- [20] Nussbaumer, H. J. (1982). Fast Fourier transform and convolution algorithms (Vol. 2). Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-81897-4>
- [21] Rao, K. R., & Yip, P. (1990). Discrete cosine transform: Algorithms, advantages, applications (1st ed.). Academic Press.
- [22] Duhamel, P. (1986). Implementation of split-radix FFT algorithms for complex, real, and real-symmetric data. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 34(2), 285–295. <https://doi.org/10.1109/TASSP.1986.1164811>
- [23] Bracewell, R. N. (1983). The discrete Hartley transform. *Journal of the Optical Society of America*, 73(12), 1832–1835. <https://doi.org/10.1364/JOSA.73.001832>
- [24] Nicholson, P. J. (1971). Algebraic theory of finite Fourier transforms. *Journal of Computer and System Sciences*, 5(5), 524–527.
- [25] Martens, J.-B. (1984). Recursive cyclotomic factorization – a new algorithm for calculating the discrete Fourier transform. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 32, 750–762.
- [26] Sorensen, H. V., Jones, D. L., Burrus, C. S., & Heideman, M. T. (1985). On computing the discrete Hartley transform. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 33(5), 1231–1238. <https://doi.org/10.1109/TASSP.1985.1164687>
- [27] Ahmed, N., Natarajan, T., & Rao, K. R. (1974). Discrete cosine transform. *IEEE Transactions on Computers*, 23(1), 90–93. <https://doi.org/10.1109/T-C.1974.223784>
- [28] Jain, A. (1976). A Fast Karhunen-Loeve Transform for a Class of Random Processes. *IEEE Transactions on Communications*, 24(9), 1023–1029. <https://doi.org/10.1109/TCOM.1976.1093409>
- [29] Yavne, R. (1968). An economical method for calculating the discrete Fourier transform. Proceedings of the December 9–11, 1968, Fall Joint Computer Conference, Part I, 115–125. <https://doi.org/10.1145/1476589.1476610>
- [30] Chan, S. C., & Ho, K. L. (1991). On indexing the prime-factor fast Fourier transform algorithm. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 38(8), 951–953. <https://doi.org/10.1109/31.85638>

- [31] Bi, G., Zeng, Y., & Chen, Y. Q. (2001). Prime factor algorithm for multidimensional discrete cosine transform. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 49(9), 2156–2161. <https://doi.org/10.1109/78.942642>
- [32] Duhamel, P., & Hollmann, H. (1984). Split-radix FFT algorithm. *Electronics Letters*, 20(1), 14–16. <https://doi.org/10.1049/el:19840012>
- [33] Gilan, M. S., & Maham, B. (2024). Optimized power and speed of Split-Radix, Radix-4 and Radix-2 FFT structures. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2024(81). <https://doi.org/10.1186/s13634-024-01178-4>
- [34] Blahut, R. E. (1985). Fast algorithms for digital signal processing. Reading, MA: Addison-Wesley.
- [35] Winograd, S. (1976). On computing the discrete Fourier transforms. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 73(4), 1005–1006. <https://doi.org/10.1073/pnas.73.4.1005>
- [36] McClellan, J. H., & Rader, C. M. (1979). Number theory in digital signal processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- [37] Britanak, V., & Rao, K. R. (1999). The fast generalized discrete Fourier transforms: A unified approach to the discrete sinusoidal transforms computation. *Signal Processing*, 79, 135–150.
- [38] Hou, N. C., Chang, H. I., & Ersoy, O. K. (1992). Generalized discrete Hartley transform. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40(12), 2931–2940. <https://doi.org/10.1109/78.175737>
- [39] Britanak, V., Yip, P. C., & Rao, K. R. (2007). Discrete cosine and sine transforms: General properties, fast algorithms and integer approximations. Academic Press.
- [40] Oppenheim, A. V., & Schaffer, R. W. (1989). Discrete-time signal processing. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- [41] Gold, B., Lebow, I. L., McHugh, P. G., & Rader, C. M. (1971). The FDP, a fast programmable signal processor. *IEEE Transactions on Computers*, C-20(1), 33–38. <https://doi.org/10.1109/T-C.1971.223078>
- [42] Rabiner, L. R., & Gold, B. (1975). Theory and application of digital signal processing. Prentice-Hall.
- [43] Sophie, G. R., & Chen, W. (1993). Fast Fourier transform on Motorola's implementation on digital signal processors (Application Note No. 4). Motorola, Inc. <https://www.bitsavers.org/components/motorola/56000/APPNOTES/APR4.PDF>
- [44] Stallings, W. (2019). Computer organization and architecture: Designing for performance (11th ed.). Pearson Education.
- [45] FFTW. (n.d.). FFTW: Fastest Fourier Transform in the West. Retrieved from <http://www.fftw.org/>
- [46] Püschel, M., Singer, B., Xiong, J., Moura, J. M. F., Johnson, J., Padua, D., Veloso, M., Johnson, R. W. (2004). SPIRAL: A generator for platform-adapted libraries of signal processing algorithms. *Journal of High Performance Computing and Applications*, 18(1), 21–45. <https://doi.org/10.1177/1094342004041291>
- [47] Du, P., Weber, R., Luszczek, P., Tomov, S., Peterson, G., & Dongarra, J. (2012). From CUDA to OpenCL: Towards a performance-portable solution for multi-platform GPU programming. *Parallel Computing*, 38(8), 391–407. <https://doi.org/10.1016/j.parco.2011.10.002>
- [48] Intel. (2017). Intel Math Kernel Library. Intel Press.
- [49] Taylor, S. (2014). Intel integrated performance primitives: How to optimize software applications using Intel IPP. Intel Press.
- [50] Nukada, A., & Matsuoka, S. (2010). Nukada FFT: An auto-tuning FFT library for CUDA GPUs. In Proceedings of the GPU Technology Conference, Research Summit Poster (San Jose, CA, USA).
- [51] Frigo, M., & Johnson, S. G. (1997). The fastest Fourier transform in the West (Technical Report MIT-LCS-TR-728). Laboratory for Computer Science, MIT, Cambridge, MA.
- [52] Burrus, C. S. (Ed.). (2008). Fast Fourier transforms. Rice University.
- [53] Розенблат, М. Ш. (1977). Алгоритмічні та апаратні методи підвищення ефективності спектроаналізаторів, використовуючих швидке перетворення Фур'є [Algorithmic and hardware methods for improving the performance of spectrum analyzers using fast Fourier transform] (Автореферат дисертації на здобуття вченого ступеня кандидата технічних наук). Фізико-механічний інститут, Львів.
- [54] Розенблат, М. Ш., & Швецький, Б. Й. (1973). Об одном методе вычисления дискретного преобразования Фурье [A method for calculating the discrete Fourier transform]. *Автометрия*, 3, 23–32.
- [55] Розенблат, М. Ш., & Швецький, Б. Й. (1975). Об одном алгоритме быстрого преобразования Фурье [A fast Fourier transform algorithm]. *Автоматика и телемеханика*, 4, 138–147.
- [56] Yatsimirskij, M. N. (1992). Fast Hartley transform by Rader-Brenner method. *Radiotekhnika*, 1–2, 66–70.
- [57] Yatsimirskij, M. N. (1993). Fast algorithms for the discrete cosine transformation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 33(2), 267–270.
- [58] Погрібно́й, В. А. (1982). Дельта-модуляція в апаратному спектральному аналізі [Delta modulation in hardware spectral analysis]. *Радиотехніка і електроніка*, 27(7), 1352–1361.
- [59] Погрібно́й, В. А., & Яковлев, В. П. (1986). Реалізація дискретного преобразования Фур'є з дельта-модуляцією [Implementation of discrete Fourier transform with delta modulation]. *Известия вузов СССР. Серия Радиоэлектроника*, 29(5), 60–65.
- [60] Погрібно́й, В. А. (1990). Дельта-модуляція в цифровій обробці сигналів [Delta modulation in digital signal processing]. *Радио и связь*.
- [61] Ланцов, А. Л., & Дунець, Р. Б. (1985). Устрійство мікропрограми управління [Device for microprogram control]. А. С. 1151961, Бюл. № 5, 1151961.
- [62] Ланцов, А. Л. (1985). Устрійство для виводу інформації [Device for information output]. А. С. 1167614, Бюл. № 26, 1167614.
- [63] Ланцов, А. Л. (1985). Устрійство для зв'язу в багато-процесорній системі [Device for communication in a multiprocessor system]. А. С. 1180914, Бюл. № 30, 1180914.
- [64] Prots'ko, I. (2013). Algorithm of efficient computation of DCT I-IV using cyclic convolutions. *International Journal of Circuits, Systems and Signal Processing*, 7(1), 1–9.
- [65] Prots'ko, I. (2014). Algorithm of efficient computation of generalized discrete Hartley transform based on cyclic convolutions. *IET Signal Processing*, 4(4), 301–308. <https://doi.org/10.1049/iet-spr.2013.0204>

- [66] Prots'ko, I., & Mishchuk, M. (2021). Block-cyclic structuring of the basis of Fourier transforms based on cyclic substitution. *Cybernetics and Systems Analysis*, 57(6), 1008–1016. <https://doi.org/10.1007/s10559-021-00426-x>
- [67] Prots'ko, I., & Teslyuk, V. (2014). Algorithm of efficient computation DSTI-IV using cyclic convolutions. *WSEAS Transactions on Signal Processing*, 10, 278–288.
- [68] Guo, J. I., Liu, C.-M., & Jen, C.-W. (2024). Unified array architecture for discrete cosine transform, sine transform and their inverses. *Electronics Letters*, 31(21), 1811–1812. <https://doi.org/10.1049/el:19951254>
- [69] Xue, S., Qiu, W., Liu, F., & Jin, X. (2020). Faster image super-resolution by improved frequency-domain neural networks. *Signal, Image and Video Processing*, 14(2), 257–265. <https://doi.org/10.1007/s11760-019-01548-8>
- [70] Zhang, H., & Ma, J. (2020). Hartley spectral pooling for deep learning. *CSIAM Transactions on Applied Mathematics*, 1(3), 518–529. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1810.04028>
- [71] Lin, J., & Yao, Y. (2019). A fast algorithm for convolutional neural networks using tile-based fast Fourier transforms. *Neural Processing Letters*, 50, 1951–1967. <https://doi.org/10.1007/s11063-019-09981-z>
- [72] Zhang, J., Liao, Y., Zhu, X., Wang, H., & Ding, J. (2020). A deep learning approach in the discrete cosine transform domain to median filtering forensics. *IEEE Signal Processing Letters*, 27, 276–280. <https://doi.org/10.1109/LSP.2020.2966888>
- [73] Bao, J., Zhang, J., Zhang, C., & Bao, L. (2025). DTCNet: Sequency discrete cosine transform convolution network for visual recognition. *Neural Networks*, 185, 107143. <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2025.107143>

I. O. Prots'ko, V. M. Teslyuk, R. B. Dunets

Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine

FAST FOURIER TRANSFORM – 60 YEARS OLD

Fast Fourier transform (FFT), since the advent of the Cooley – Tukey algorithm, has occupied its important niche in the vast information and technical space of modern implementations. In general, assessing the importance and influence of the Cooley – Tukey algorithm on the development of various fields of science is an incredibly difficult task. The publication considers the prerequisites and historical formation of the Cooley – Tukey algorithm as a fundamental algorithm of the fast Fourier transform. The development of FFT research in the direction of developing effective algorithms for harmonic analysis, which led to significant results confirmed by numerous publications, is considered. The main directions of FFT formalization are highlighted and the multivariate nature of effective calculations is emphasized. The importance of the complementary influence of FFT on the formation of high-performance computing hardware is noted. After all, it is the development of new methods and technical capabilities for accelerating the execution of FFT that determined the architectural features of modern microprocessors as highly efficient means of implementing calculations. It is noted that the development of software has made it possible to create reliable and very fast software systems for performing Fourier transforms on various computer platforms and digital signal processors. The publication reviews the development of key aspects of FFT in the world practice of signal processing and the development of FFT tools by Lviv research institutions over the sixtieth anniversary of the Cooley – Tukey algorithm. In the OKB EIVT LPI, even before the advent of the fast Cooley – Tukey algorithm for calculating the Fourier transform, digital spectrum analyzers began to be developed. The result of the developments in 1983–1984 was the release of serial spectrum analyzers (approximately 200 samples) with parameters that exceeded the analyzers of the world-famous company “Brüel&Kjaer” (Denmark). The FFT tools developed at the Lviv Research Radio Engineering Institute and the Institute of Physics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine have made it possible to successfully use them for radar stations, scientific space research, and others.

Despite the analyses of the significance of FFTs, new theoretical results are still emerging, progress in computers and hardware is constantly renewing the main tasks of using FFTs, and new Fourier transform programs are opening up new areas for applied research.

Keywords: fast Fourier transform, Cooley – Tukey algorithm, fast trigonometric transforms, coprocessors FFT, DFT software libraries.

Інформація про авторів:

Процько Ігор Омелянович, д-р техн. наук, професор кафедри автоматизованих систем управління. Email: ihor.o.protsko@lpnu.ua; <https://orcid.org/0000-0002-3514-9265>

Теслюк Василь Миколайович, д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри автоматизованих систем управління. Email: vasyl.m.teslyuk@lpnu.ua; <https://orcid.org/0000-0002-5974-9310>

Дунець Роман Богданович, д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри електронно-обчислювальних машин. Email: roman.b.dunets@lpnu.ua; <https://orcid.org/0000-0002-3325-7908>

Цитування за ДСТУ: Процько І. О., Теслюк В. М., Дунець Р. Б. Швидкому перетворенню Фур'є – 60 років. Український журнал інформаційних технологій. 2025, т. 7, № 1. С. 01–15.

Citation APA: Prots'ko, I. O., Teslyuk, V. M., & Dunets, R. B. (2025). Fast Fourier transform – 60 years old. *Ukrainian Journal of Information Technology*, 7(1), 01–15. <https://doi.org/10.23939/ujit2025.01.001>