

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ КВАНТОВОЇ ФАЗИ НА СТАН КУБІТА У СХЕМАХ З ПОСЛІДОВНО З'ЄДНАНИМИ ВЕНТИЛЯМИ АДАМАРА

Т. І. Онишкевич, В. С. Глухов

Національний університет "Львівська політехніка",

кафедра електронних обчислювальних машин

E-mails: Tetiana.Onyshkevych.KI.2021@lpnu.ua, Valerii.S.Hlukhov@lpnu.ua

© Онишкевич Т. І., Глухов В. С., 2025

Наведено дослідження впливу квантової фази на стан кубіта у схемах з послідовно з'єднаними вентилями Адамара з метою подальшої мінімізації під час програмного або апаратного моделювання. Дослідження здійснено за допомогою платформи квантових обчислень Azure Quantum для симуляції квантових алгоритмів та запуску квантових програм на спеціалізованому обладнанні.

У дослідженні детально розглянуто роботу вентиля Адамара, промодельовано роботу схеми з двох послідовно з'єднаних вентилів Адамара при початкових входах $|0\rangle$ та $|1\rangle$ та промодельовано роботу схеми з послідовним зміщенням на $\frac{\pi}{4}$ і вентилям Адамара при початкових входах $|0\rangle$ та $|1\rangle$. Під час дослідження було з'ясовано, як однаковий проміжний стан кубіта за допомогою фази може мати різні виходи після вентиля Адамара. А також, порівняно результати схем, де перший вентиль Адамара замінений на послідовне зміщення на $\frac{\pi}{4}$.

Отримані результати може бути використано для перевірки роботи моделі вентиля Адамара під час створення його цифрової моделі.

Ключові слова: вентиль Адамара, квантові вентиля, квантові обчислення, суперпозиція.

Вступ

Розвиток квантових обчислень відкриває нові можливості для розв'язання складних обчислювальних задач, які неможливо або вкрай важко реалізувати на класичних комп'ютерах. Під час моделювання та оптимізації квантових схем важливо враховувати вплив квантової фази, яка може суттєво змінювати кінцевий стан кубіта після застосування вентиля Адамара. Дослідження ефекту фазового зсуву та можливостей мінімізації зайвих операцій дає змогу підвищити ефективність квантових алгоритмів та зменшити обчислювальні витрати. Крім цього, оптимізація квантових схем дає змогу зменшити кількість операцій у квантовій схемі, що зменшує ймовірність декогеренції у квантовій системі. Це особливо важливо для реалізації квантових обчислень на фізичних пристроях, де кожна додаткова операція може спричинити втрати інформації.

Досліджено вплив квантової фази на стан кубіта у схемах з послідовно з'єднаними вентилями Адамара. Для проведення симуляцій використано платформу Azure Quantum, яка використовує мову Q# та дозволяє моделювати поведінку квантових схем у програмному середовищі. Azure Quantum надає можливість запускати квантові програми на квантовому обладнанні, моделювати квантові алгоритми та оцінювати ресурси, необхідні для запуску квантових програм на майбутніх масштабованих квантових машинах. Проведено аналіз зміни стану кубіта після застосування подвійного

вентиля Адамара та після послідовного зміщення на $\frac{\pi}{4}$ та вентиля Адамара. Також розглянуто можливості мінімізації квантових схем шляхом усунення зайвих операцій. Отримані результати можуть бути використані для подальшої оптимізації квантових схем з вентилям Адамара, проектування цифрових моделей квантових вентилів та для моделювання роботи вентиля Адамара мовами опису апаратури.

Огляд літературних джерел

Дослідження, що стосуються квантових вентилів та їх поведінки, є актуальною темою в галузі квантових обчислень. Базові властивості вентиля Адамара та його застосування у квантових алгоритмах детально розглянуто у статті [2]. Книги [2] та [3] були для авторів основним джерелом для розуміння принципів квантової механіки та квантових вентилів, зокрема впливу квантової фази на стан кубіта.

Важливим аспектом є також огляд імовірнісних амплітуд та їхнього впливу на результати вимірювань у квантових системах [4]. Питання впливу вентиля Адамара на різні квантові стани обговорюється у статті [1].

Дослідження квантових вентилів, фази та її ефекту на стани кубіта також наведено у праці [8]. У цьому джерелі проаналізовано роботу різних вентилів у квантових схемах та продемонстровано способи декомпозиції для одно-, дво-, три- та багатокубітних вентилів.

Практичний аспект моделювання квантових вентилів для цифрових систем, які планується використовувати для квантово-інспірованих обчислень, розглядається у [5], де запропоновано FPGA-орієнтовані підходи до реалізації квантових вентилів. Візуалізацію станів кубіта за допомогою сфери Блоха, що використовується у цьому дослідженні, наведено в [7].

Ознайомлення з набором для розробки програмного забезпечення (QDK), який містить компілятор Q#, різноманітні квантові симулятори та інструменти для розробки та проектування квантового програмного забезпечення наведено в [6].

Постановка задачі

Завданням цього дослідження є моделювання роботи вентиля Адамара з метою подальшої оптимізації квантових схем з цим вентилям.

Цю статтю першочергово зосереджено на дослідженні впливу фази на кінцевий результат роботи квантової схеми, коли кубіт може перебувати у початкових станах $|0\rangle$ або $|1\rangle$. Після першого перетворення Адамара, незалежно від початкового стану, кубіт переходить у невизначений стан $|X\rangle$. Після другого перетворення Адамара, що отримує на вхід невизначений стан $|X\rangle$, отримуємо різні результати на виході квантової схеми. Також необхідно отримати стан $|X\rangle$ без використання першого вентиля Адамара. Для цього ми застосуємо послідовне зміщення вектора на кут $\frac{\pi}{4}$ навколо осі Y (на сфері Блоха). Досягнувши невизначеного стану $|X\rangle$, застосуємо до нього вентиль Адамара, а також проаналізуємо отримані результати.

Таке дослідження дає змогу краще зрозуміти спосіб роботи вентиля Адамара задля його подальшого опису мовами програмування та мовами опису апаратних засобів.

Вплив вентиля Адамара на стан кубіта

Відомо, що одне застосування вентиля Адамара до кубіта із станом $|0\rangle$ або $|1\rangle$ створить квантовий стан, який, якщо його спостерігатимуть, буде рівним $|0\rangle$ або $|1\rangle$ з однаковою ймовірністю [3]. Тобто такий стан можна описати таким рівнянням:

$$H|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha - \beta \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де α і β - комплексні ймовірнісні амплітуди кубіта [4].

Розрахунковим методом можна отримати таке саме рівняння, помноживши вектор стану $|0\rangle$ на матрицю Адамара:

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle = |+\rangle.$$

Стан суперпозиції при вхідному стані $|0\rangle$ зображено на сфері Блоха (рис. 1), яка є візуалізацією стану кубіта у квантовій механіці.

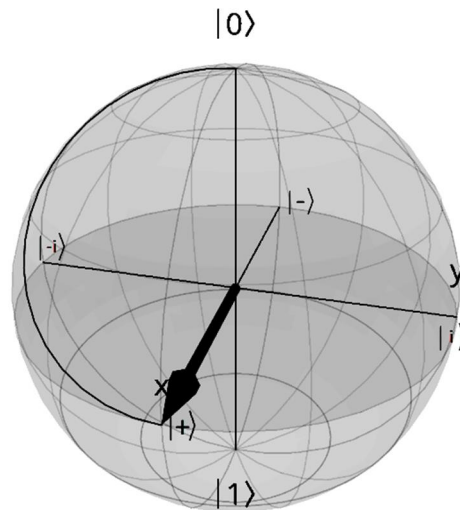


Рис. 1. Візуалізація стану $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ на сфері Блоха

Помноживши матрицю Адамара на вектор стану $|1\rangle$, отримаємо такий результат:

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle = |-\rangle.$$

Стан суперпозиції при вхідному стані $|1\rangle$ зображено на сфері Блоха (рис. 2):

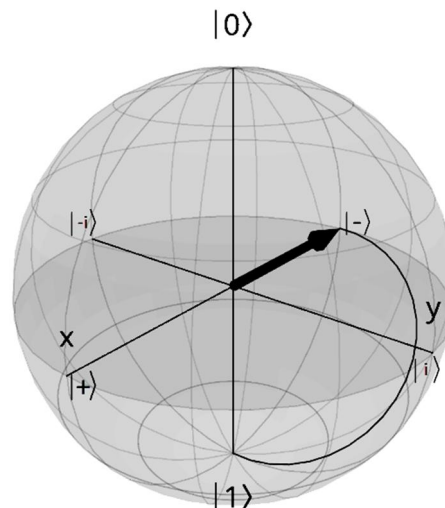


Рис. 2. Візуалізація стану $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ на сфері Блоха

Зі сфер на рис. 1 та рис. 2 видно, що кубіт після застосування вентиля Адамара перебуває у суперпозиції, проте не в одному невизначеному стані $|X\rangle$, а у двох різних, $|+\rangle$ та $|-\rangle$, з різними фазами. Отже, цей дослід підтверджує, що навіть якщо результати вимірювань здаються суто випадковими, кубіт перед вимірюванням однаково перебуває у чітко визначеному стані [3].

Зауважимо, що вентиль Адамара під час використання моделі кубіта у вигляді сфери Блоха змінює стан кубіта не прямолінійно, а у вигляді півкола. Це відбувається через обертання навколо осі $\frac{1}{\sqrt{2}}X + Z$ на ктп π [8]. Вентиль Адамара також може бути виражений як композиція вентилів повороту $H = R_Y(\frac{\pi}{2})R_Z(\pi)$, що задано матрицями

$$R_Z(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \quad R_Y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

де θ – кут повороту навколо осі.

Підставимо кут θ та з добутку цих двох матриць отримаємо

$$R_Y\left(\frac{\pi}{2}\right)R_Z(\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & -i \\ -i & i \end{pmatrix}.$$

Отриману матрицю можемо розписати як добуток $-i \cdot H$, де $-i$ – глобальна фаза

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & -i \\ -i & i \end{pmatrix} = -i \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Визначення квантової фази та її вплив на стан кубіта

Застосувавши вентиль Адамара до кубітів у різних станах, ми отримали два різні стани, в яких може перебувати кубіт після перетворення:

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle = |+\rangle \quad \text{та} \quad H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle = |-\rangle.$$

Зауважимо, що стани $|0\rangle$ або $|1\rangle$ представляють лише один з багатьох можливих варіантів базисних станів для кубіта. Іншим можливим варіантом є набір $|+\rangle \equiv (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ та $|-\rangle \equiv (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$. Довільний стан $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ також може бути виражено через стани $|+\rangle$ та $|-\rangle$:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \alpha \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} + \beta \frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}|-\rangle. \quad (3)$$

З'ясувалось, що можна розглядати стани $|+\rangle$ і $|-\rangle$ так, ніби вони є обчислювальними базисними станами, і вимірювати стан кубіта відносно цього нового базису [3]. Отже, на сфері Блоха стани $|+\rangle$ та $|-\rangle$ матимуть такий вигляд (рис. 3):

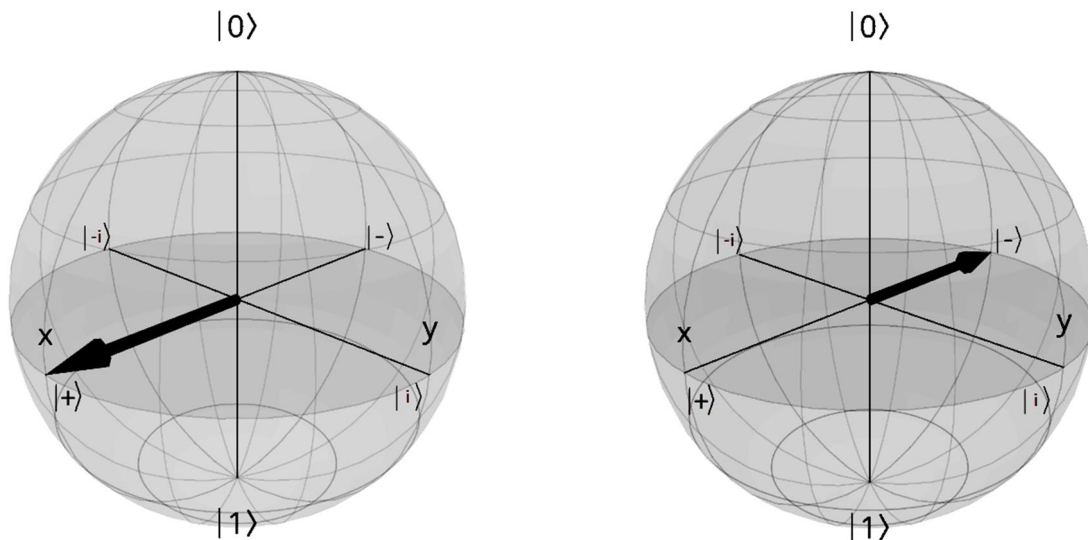


Рис. 3. Вигляд обчислювальних базисних станів $|+\rangle$ та $|-\rangle$ на сфері Блоха

Вплив вентиля Адамара на базисні стани $|+\rangle$ та $|-\rangle$

Застосувавши формулу (1) до обчислювальних базисних станів $|+\rangle$ та $|-\rangle$, отримаємо такі результати:

$$H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle.$$

$$H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle.$$

Вищенаведені обчислення доводять, що якщо вентиль Адамара застосовується двічі поспіль, то кінцевий стан кубіта завжди збігається з початковим [2]. Звідси можна довести, що перетворення Адамара є інволютивним, тобто $H^2 = I$, де I - одинична матриця [1].

$$HH = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Звідси, застосувавши вентиль Адамара до стану $|0\rangle$ двічі, отримаємо стан $|0\rangle$. На рис. 4 наведено подвійне застосування вентиля Адамара на кубіт в стані $|0\rangle$ на сфері Блоха.

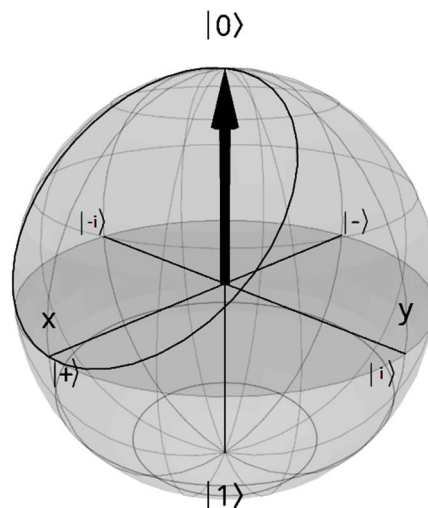


Рис. 4. Подвійне застосування вентиля Адамара до стану $|0\rangle$

З початковим станом $|1\rangle$ спостерігатимемо таку саму поведінку вентиля на рис. 5.

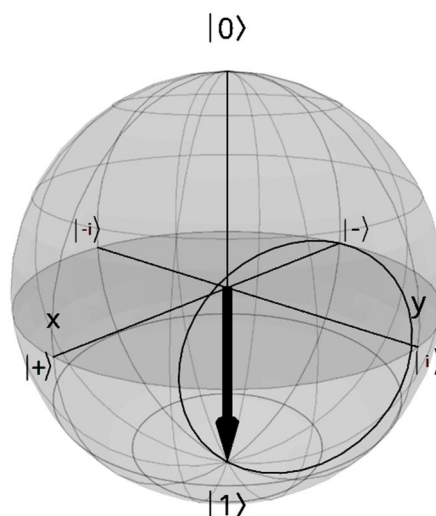


Рис. 5. Подвійне застосування вентиля Адамара до стану $|1\rangle$

Вплив вентиля Адамара на плавно змінюваний від $|0\rangle$ або $|1\rangle$ вхідний стан

У розділі [0] було досліджено вплив послідовно з'єднаних вентилів Адамара на чітко визначений вхідний стан $|0\rangle$ або $|1\rangle$. У цьому розділі розглядається вплив одного вентиля Адамара на кубіт, вхідний стан якого плавно змінюється від $|0\rangle$ до $|1\rangle$. Цей процес досліджено через параметр θ , який визначає кути обертання кубіта. Параметр θ змінюється від 0 до $\pi/2$, що дає змогу спостерігати перехід від стану $|0\rangle$ до стану $|1\rangle$

$$\psi = \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle. \quad (4)$$

При $\theta = 0$ $|\psi\rangle = |0\rangle$, при $\theta = \pi/2$ $|\psi\rangle = |1\rangle$. Оператор $R_y(\theta)$ обертає кубіт навколо осі Y на кут θ .

Після обертання застосовуємо вентиль Адамара, який переводить кубіт до нової суперпозиції, і спостерігаємо, як змінюються ймовірності $P(0)$ та $P(1)$ отримання станів, відповідно, $|0\rangle$ та $|1\rangle$ після вимірювання (рис. 6).

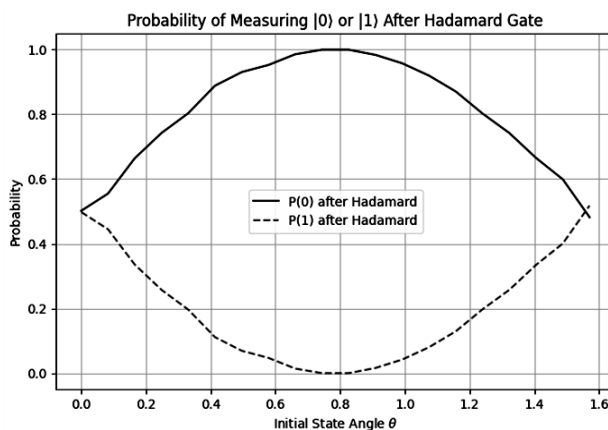


Рис. 6. Графік ймовірності вимірювання $|0\rangle$ або $|1\rangle$ при зміні θ

Для плавного переходу між станами $|0\rangle$ та $|1\rangle$ було взято 20 кроків. Тобто θ змінюється за формулою $\theta_i = \frac{i}{19} \cdot \frac{\pi}{2}$, де i – номер кроку.

Для наочності наведено перші декілька значень, які змінюватимуться так:

При θ_0 , $|\psi\rangle = \cos(0)|0\rangle + \sin(0)|1\rangle = |0\rangle$

Після вентиля Адамара:

$$P(0) = \frac{1}{2}(1 + \sin(0)) = 0.5$$

$$P(1) = \frac{1}{2}(1 - \sin(0)) = 0.5$$

При θ_1 , $|\psi\rangle = 0.9966|0\rangle + 0.0826|1\rangle$

Після вентиля Адамара:

$$P(0) = \frac{1}{2}(1 + \sin(0.1654)) \approx 0.58$$

$$P(1) = \frac{1}{2}(1 - \sin(0.1654)) \approx 0.42$$

При θ_2 , $|\psi\rangle = 0.9863|0\rangle + 0.1650|1\rangle$

Після вентиля Адамара:

$$P(0) = \frac{1}{2}(1 + \sin(0.3308)) \approx 0.66$$

$$P(1) = \frac{1}{2}(1 - \sin(0.3308)) \approx 0.34$$

При θ_3 , $|\psi\rangle = 0.9682|0\rangle + 0.2482|1\rangle$

Після вентиля Адамара:

$$P(0) = \frac{1}{2}(1 + \sin(0.4960)) \approx 0.73$$

$$P(1) = \frac{1}{2}(1 - \sin(0.4960)) \approx 0.26$$

Дослідження переходу в невизначений стан за допомогою послідовних зміщень $R_Y(\pi/4)$ замість вентиля Адамара

Як було зазначено у попередніх розділах, вентиль Адамара перетворює вхідний стан $|0\rangle$ або $|1\rangle$ у стан суперпозиції $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ або, інакше кажучи, в обчислювальні базиси $|+\rangle$ і $|-\rangle$. Проте отримати стан $|+\rangle$ з $|0\rangle$ або стан $|-\rangle$ з $|1\rangle$ можна не лише за допомогою вентиля Адамара. Змодельуємо такі квантові схеми (рис. 7, рис. 8), де перехід у стани $|+\rangle$ та $|-\rangle$ досягнуто за допомогою послідовного зміщення на $\pi/4$ (на 0,7854) навколо осі Y:

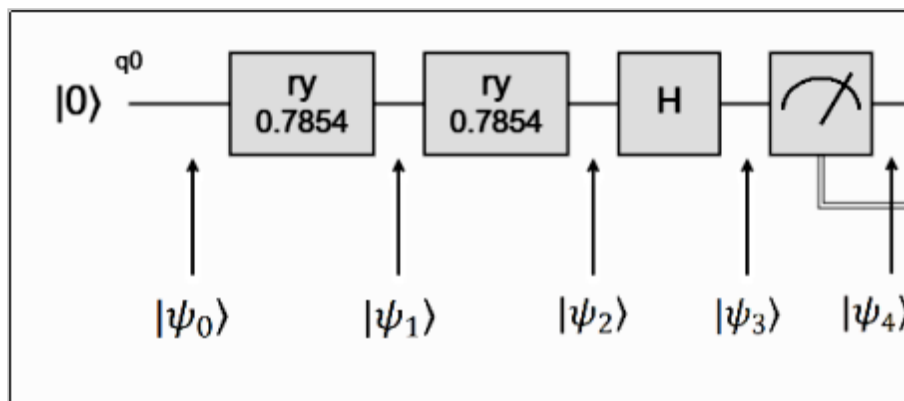


Рис. 7. Квантова схема з 2 послідовними зміщеннями $R_Y(\pi/4)$ та вентилям Адамара

Послідовне застосування $R_Y(\pi/4)R_Y(\pi/4)|0\rangle$ дає $R_Y(\pi/2)|0\rangle$, та, спираючись на формулу (2) для R_Y , отримаємо $\cos(\pi/4)|0\rangle + \sin(\pi/4)|1\rangle$, що еквівалентно стану $|+\rangle$. Застосувавши $H|+\rangle$, отримаємо $|0\rangle$. Таблиця 1 демонструє проміжні стани $|\psi_n\rangle$ кубіта.

Таблиця 1

Проміжні результати схеми з 2 послідовними зміщеннями $R_Y(\pi/4)$ та вентилям Адамара

Проміжний стан	Базис	Амплітуда	Ймовірність	Фаза	Сфера Блоха
$ \psi_0\rangle$	$ 0\rangle$	$1.0000 + 0.0000i$	100.0000 %	0.0000	
$ \psi_1\rangle$	$ 0\rangle$ $ 1\rangle$	$0.9239 + 0.0000i$ $0.3827 + 0.0000i$	85.3553 % 14.6447 %	0.0000 0.0000	
$ \psi_2\rangle$	$ 0\rangle$ $ 1\rangle$	$0.7071 + 0.0000i$ $0.7071 + 0.0000i$	50.0000 % 50.0000 %	0.0000 0.0000	
$ \psi_3\rangle = \psi_4\rangle$	$ 0\rangle$	$1.0000 + 0.0000i$	100.0000 %	0.0000	

У квантовій схемі (рис. 8) послідовне застосування 6 вентилів $R_Y(\pi/4)$ можна записати як $R_Y(3\pi/2)$.

$$R_Y(3\pi/2)|0\rangle = R_Y(\pi)R_Y(\pi/2)|0\rangle = R_Y(\pi/2)|1\rangle.$$

Після чого застосуємо формулу (2) для $R_Y(\pi/2)$ до стану $|1\rangle$ та отримаємо $\cos(\pi/4)|0\rangle - \sin(\pi/4)|1\rangle$, що дорівнює стану $|-\rangle$.

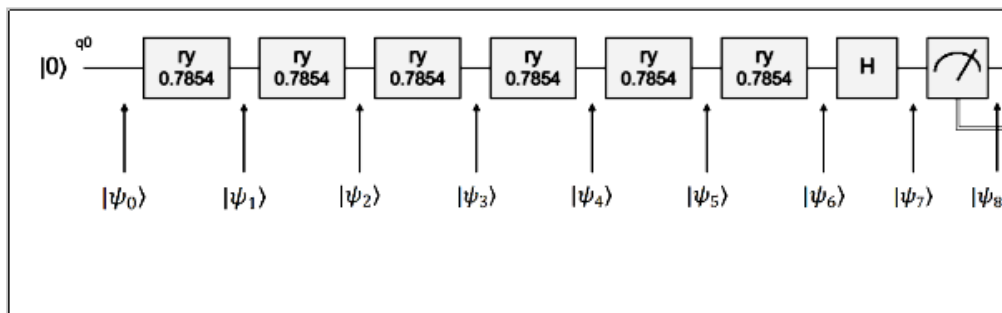


Рис. 8. Квантова схема з 6 послідовними зміщеннями $R_Y(\pi/4)$ та вентилям Адамара

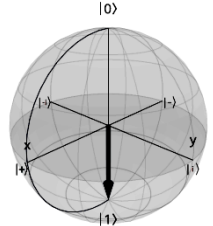
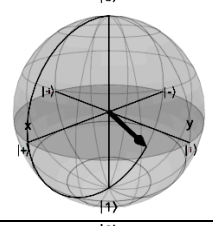
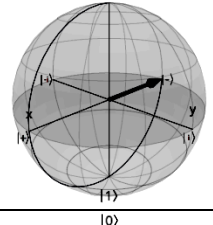
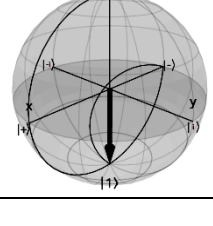
Таблиця 2 демонструє проміжні стани $|\psi_n\rangle$ кубіта.

Таблиця 2

Проміжні результати схеми з 6 послідовними зміщеннями $R_Y(\pi/4)$ та вентилям Адамара

Проміжний стан	Базис	Амплітуда	Ймовірність	Фаза	Сфера Блоха
1	2	3	4	5	6
$ \psi_0\rangle$	$ 0\rangle$	$1.0000 + 0.0000i$	100.0000 %	0.0000	
$ \psi_1\rangle$	$ 0\rangle$ $ 1\rangle$	$0.9239 + 0.0000i$ $0.3827 + 0.0000i$	85.3553 % 14.6447 %	0.0000 0.0000	
$ \psi_2\rangle$	$ 0\rangle$ $ 1\rangle$	$0.7071 + 0.0000i$ $0.7071 + 0.0000i$	50.0000 % 50.0000 %	0.0000 0.0000	
$ \psi_3\rangle$	$ 0\rangle$ $ 1\rangle$	$0.3827 + 0.0000i$ $0.9239 + 0.0000i$	14.6447 % 85.3553 %	0.0000 0.0000	

Продовження табл. 2

1	2	3	4	5	6
$ \psi_4\rangle$	$ 1\rangle$	$1.0000 + 0.0000i$	100.0000%	0.0000	
$ \psi_5\rangle$	$ 0\rangle$ $ 1\rangle$	$-0.3827 + 0.0000i$ $0.9239 + 0.0000i$	14.6447 % 85.3553 %	3.1416 0.0000	
$ \psi_6\rangle$	$ 0\rangle$ $ 1\rangle$	$-0.7071 + 0.0000i$ $0.7071 + 0.0000i$	50.0000 % 50.0000 %	3.1416 0.0000	
$ \psi_7\rangle = \psi_8\rangle$	$ 0\rangle$ $ 1\rangle$	$-1.0000 + 0.0000i$	100.0000 %	3.1416	

Лінійна залежність кутів при перетворенні Адамара

Стан одного кубіта виражається як $A|0\rangle + B|1\rangle$, що називається квантовою суперпозицією. Для сфери Блоха амплітуди $A = \cos(\theta/2)$ та $B = e^{-i\varphi}\sin(\theta/2)$, для одиничного кола $A = \cos(\theta)$ та $B = \sin(\theta)$ відповідно. Тоді для одиничного кола стан кубіта виражатиметься як $\psi = \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle$, як це показано на рис. 9 [5].

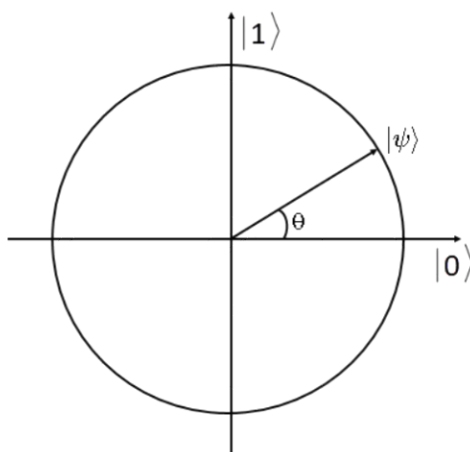


Рис. 9. Представлення кубіта на одиничному колі для дійсних амплітуд

Перетворення Адамара встановлює вектор, визначений кутом θ , на кут β , що визначається [5] як

$$\beta = \arctg \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta}. \quad (5)$$

Залежність β від θ є лінійною (рис. 10), а отже, новий кут легко обчислюється цифровою моделлю кубіта (цифровим кубітом). Повторне перетворення Адамара і в моделі на основі одиничного кола повертає вектор до його попереднього стану. Це можна перевірити за допомогою рис. 10 для діапазону кутів θ від 0 до $\frac{\pi}{2}$ (до 1,57).

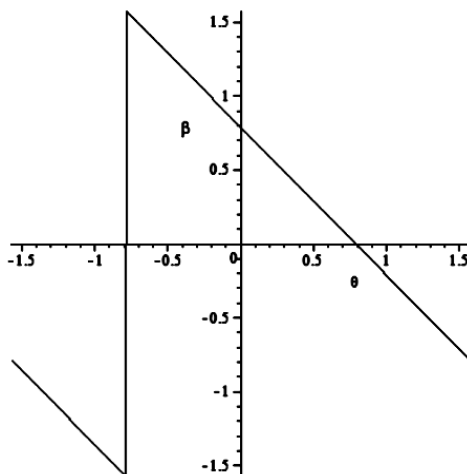


Рис. 10. Зміна кута вектора в результаті перетворення Адамара

Модель кубіта на основі модифікованого одиничного кола

За представленням кубіта з використанням одиничного кола вентиль Адамара переводить кубіт із станів $|0\rangle$ та $|1\rangle$ у два невизначених стани $H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle = |+\rangle$ та $H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle = |-\rangle$ відповідно. З рис. 10 бачимо, що переходу до стану $|+\rangle$ відповідають кути $\theta=0$ та $\beta=\pi/4 \approx 1,57$, а до стану $|-\rangle$ – кути $\theta=\pi/2 \approx 3,14$ та $\beta=-\pi/4 \approx -1,57$ (рис. 11).

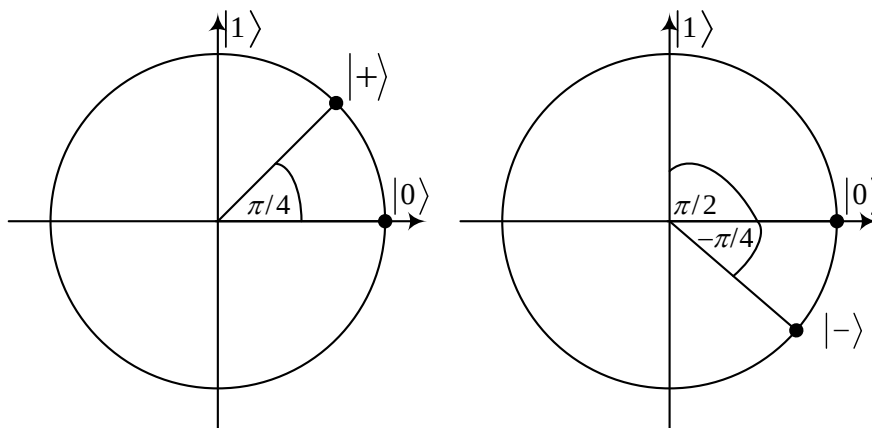


Рис. 11. Стани $|+\rangle$ та $|-\rangle$ на одиничному колі

Хоча імовірність переходу кубіта в результаті вимірювання з обох невизначених станів до станів $|0\rangle$ та $|1\rangle$ однакова і для стану $|+\rangle$ візуально у цьому можна пересвідчитися на рис. 11 – вектор $|+\rangle$ є бісектрисою кута між напрямком на $|0\rangle$ і напрямком на $|1\rangle$, але для стану $|-\rangle$ це не очевидно з візуалізації моделі кубіта (рис. 11).

Для усунення цього недоліку пропонується використовувати для моделі кубіта модифіковане одиничне коло, яке поєднує в собі простоту звичайного одиничного кола і точність сфери Блоха (рис. 12).

Подібно до сфери Блоха хвильова функція буде мати вигляд $\psi = \cos(\theta/2)|0\rangle + \sin(\theta/2)|1\rangle$, але як в одиничному колі буде мати тільки дійсні амплітуди. Як видно з рис. 12, візуалізація результатів вимірювання станів $|+\rangle$ та $|-\rangle$ стає більш зрозумілою: обидва невизначених стани є на однаковій кутовій відстані від станів $|0\rangle$ та $|1\rangle$.

Наступним кроком роботи є створення цифрової моделі кубіта, яка візуалізується зміною положення вектора на модифікованому одиничному колі (рис. 12).

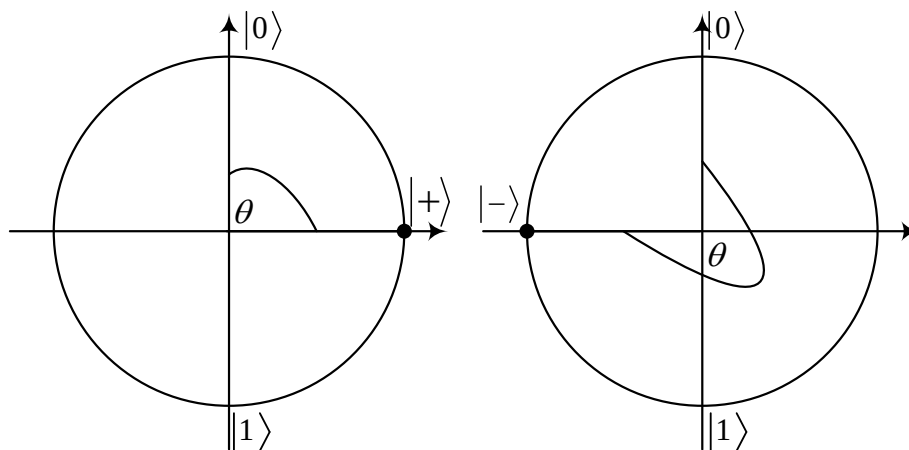


Рис. 12. Стани $|+\rangle$ та $|-\rangle$ на модифікованому одиничному колі

Результати дослідження

Базуючись на попередніх даних про поведінку вентиля Адамара та вплив фази на нього, змодельуємо такі квантові схеми (рис. 13, рис. 14).

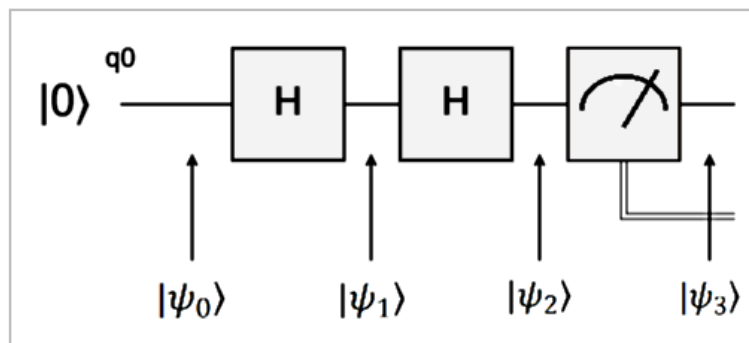


Рис. 13. Квантова схема з послідовним вентилям Адамара та вхідним станом $|0\rangle$

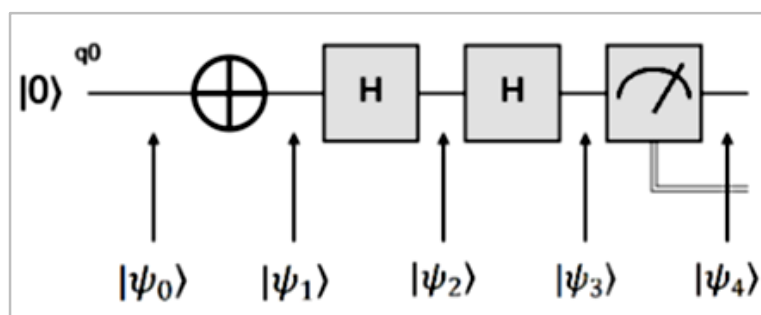


Рис. 14. Квантова схема з послідовним вентилям Адамара та проміжним станом $|\psi_1\rangle = |1\rangle$

Для схеми рис. 14 попередньо застосовано вентиль Паулі Х, щоб перетворити вхідний стан з $|0\rangle$ в $|1\rangle$, оскільки ініціалізований кубіт завжди є у стані $|0\rangle$.

Після кожної операції над кубітом використовуватимемо функцію DumpMachine() мови Q#, щоб відсежувати проміжні стани кубіта $|\psi\rangle$. Результати вимірювань записано у таблицях (табл. 3 та табл. 4).

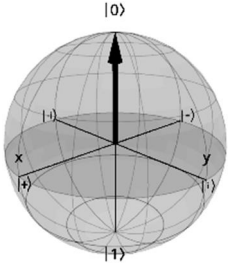
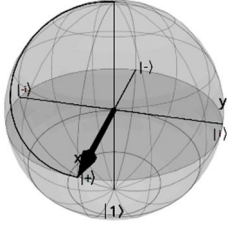
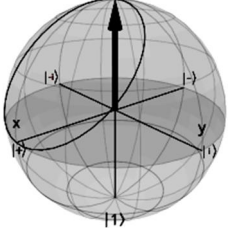
Для прикладу наведено фрагмент програми мовою Q#, що виконує трансформацію кубіта (рис. 14):

```
operation TransformQubit() : Result
{
    use qubit = Qubit();
    DumpMachine();
    X(qubit);
    DumpMachine();
    H(qubit);
    DumpMachine();
    H(qubit);
    DumpMachine();
    let result = M(qubit);
    Reset(qubit);

    return result;
}
```

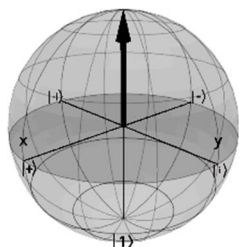
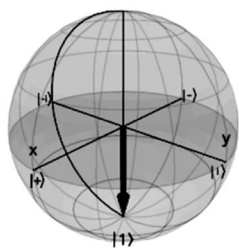
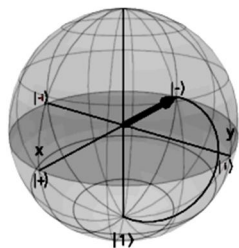
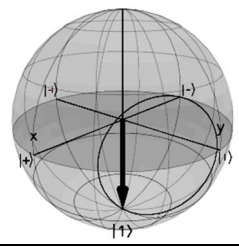
Таблиця 3

Проміжні результати схеми з входом $|0\rangle$

Проміжний стан	Базис	Амплітуда	Ймовірність	Фаза	Сфера Блоха
$ \psi_0\rangle$	$ 0\rangle$	1.0000 + 0.0000i	100.0000 %	0.0000	
$ \psi_1\rangle$	$ 0\rangle$ $ 1\rangle$	0.7071 + 0.0000i 0.7071 + 0.0000i	50.0000 % 50.0000 %	0.0000 0.0000	
$ \psi_2\rangle = \psi_3\rangle$	$ 0\rangle$	1.0000 + 0.0000i	100.0000 %	0.0000	

Таблиця 4

Проміжні результати схеми з входом $|\psi_1\rangle = |1\rangle$

Проміжний стан	Базис	Амплітуда	Ймовірність	Фаза	Сфера Блоха
$ \psi_0\rangle$	$ 0\rangle$	$1.0000 + 0.0000i$	100.0000 %	0.0000	
$ \psi_1\rangle$	$ 1\rangle$	$1.0000 + 0.0000i$	100.0000 %	0.0000	
$ \psi_2\rangle$	$ 0\rangle$ $ 1\rangle$	$0.7071 + 0.0000i$ $-0.7071 + 0.0000i$	50.0000 % 50.0000 %	0.0000 -3.1416	
$ \psi_3\rangle = \psi_4\rangle$	$ 1\rangle$	$1.0000 + 0.0000i$	100.0000 %	0.0000	

Висновки

Проведено дослідження впливу квантової фази на стан кубіта у схемах з послідовно з'єднаними вентилями Адамара. Було показано, що застосування вентиля Адамара до стану кубіта не лише створює суперпозицію, а й призводить до змін у фазових характеристиках, що впливає на кінцевий результат квантових обчислень. Таке дослідження може бути корисним під час опису вентиля мовами програмування та мовами опису апаратних засобів.

Запропоновано нову модель кубіта у вигляді модифікованого одиничного кола, яка поєднує переваги сфери Блоха та звичайного одиничного кола.

Подальша робота може бути зосереджена на застосуванні отриманих результатів під час програмного моделювання вентиля Адамара та оптимізації складніших квантових схем й алгоритмів з використанням представлення кубіта за допомогою модифікованого одиничного кола, що дасть змогу оптимізувати обчислювальні процеси у системах, що реалізують квантово-інспіровані обчислення.

Подяки

У цій статті використано матеріали та результати, які отримали автори під час науково-дослідної роботи “Інтелектуальні методи та інструменти проєктування модульних автономних кіберфізичних систем”, НДР 0124U002340 від 09.03.2024, яка проводиться на кафедрі ЕОМ Інституту комп’ютерних технологій, автоматики та метрології Національного університету “Львівська політехніка” у 2024–2028 роках.

Список літератури

1. Aghaian S. S., Sarukhanyan H., Egiazarian K., Astola J. *Hadamard transforms*. SPIE. 2011. Doi: <https://doi.org/10.1117/3.890094>.
2. Yanofsky N. S., Mannucci M. A. *Quantum computing for computer scientists*. Cambridge University Press. 2008. Doi: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511813795>.
3. Nielsen M. A., Chuang I. L. *Quantum computation and quantum information (10th anniversary ed.)*. Cambridge University Press, 2010.
4. Yazhen Wang. *Quantum Computation and Quantum Information*. *Statist. Sci.* August 2012. 27(3). Pp. 6- 19. Doi: <https://doi.org/10.1214/11-STS378>.
5. Hlukhov V., Havano B. *FPGA-based digital quantum coprocessor*. *Advances in Cyber-Physical Systems*, 2018. 3(2). Pp. 67- 83. Doi: <https://doi.org/10.23939/acps2018.02.067>.
6. Mykhailova M. *Teaching Quantum Computing using Microsoft Quantum Development Kit and Azure Quantum*. Microsoft Quantum, United States. 2023. Doi: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2311.12960>.
7. Bloch sphere visualizer. March 18, 2025. <https://bloch.kherb.io> (Accessed: March, 25, 2025).
8. Crooks G. E. *Quantum gates*. 2024. URL: https://threeplusone.com/pubs/on_gates.pdf (Accessed: March, 25, 2025).

STUDY OF THE QUANTUM PHASE INFLUENCE ON THE QUBIT STATE IN CIRCUITS WITH HADAMARD GATES CONNECTED IN SERIES

T. I. Onyshkevych, V. S. Hlukhov

Lviv Polytechnic National University,
Department of Computer Engineering

© Onyshkevych T. I., Hlukhov V. S., 2025

This paper presents a study of the influence of the quantum phase on the qubit state in circuits with Hadamard gates in series for further minimisation in software or hardware modelling. The study is carried out using the Azure Quantum computing platform to simulate quantum algorithms and run quantum applications on dedicated hardware.

The study provides an overview of the qubit as a unit of quantum information, describes in detail the operation of the Hadamard gate, simulates the operation of a circuit of two Hadamard gates in series with initial inputs $|0\rangle$ and $|1\rangle$, and simulates the operation of a circuit with a sequential shift on $\frac{\pi}{4}$ and Hadamard gate inputs $|0\rangle$ and $|1\rangle$. In the course of the study, it was found how the same intermediate state of the qubit can have different outputs after the Hadamard gate, by means of phase. Also, the results of the schemes where the first Hadamard gate is replaced by a sequential shift on $\frac{\pi}{4}$.

The results obtained can be used to test the Hadamard gate model when creating its digital model.

Keywords: Hadamard gate, quantum computing, quantum gates, superposition.