

Борис Євстигнєєв

Відділ числових методів математичної фізики, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3-Б, Львів, Україна, E-mail: molnerats@gmail.com ORCID 0000-0002-9674-0112

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ АКУСТИЧНОГО РОЗСІЮВАННЯ НА СУКУПНОСТІ НЕРЕГУЛЯРНО РОЗМІЩЕНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Отримано: Серпень 20, 2025 / Переглянуто: Вересень 01, 2025 / Прийнято: Вересень 15, 2025

© Євстигнєєв Б., 2025

<https://doi.org/10.23939/cds2025.02.124>

Анотація. Розроблено аналітично-числовий підхід до розв'язання задачі розсіювання акустичних хвиль багатьма малими частинками, за припущення, що відстань між ними більша за їхній радіус. Припускається, що відстані між частинками можуть змінюватися, і ця зміна може бути задана по-різному. На межах частинок задають імпедансні граничні умови. Результати числового моделювання показують, що характеристики розсіювання побудованої неоднорідної області чутливі до способу розподілу частинок. Отриманими результатами можна скористатися для створення матеріалів із заданим коефіцієнтом рефракції.

Ключові слова: розсіювання акустичних хвиль, мала частинка, граничний імпеданс, асимптотичний підхід, коефіцієнт заломлення, числове моделювання.

Вступ

Розсіювання акустичних хвиль є однією з фундаментальних проблем сучасної акустики, яка має важливе теоретичне та практичне значення. Вивчення механізмів взаємодії акустичних хвиль із твердими тілами допомагає глибше зрозуміти процеси передавання, відбиття та поглинання енергії у різних середовищах. Ці знання широко застосовують у неруйнівному контролі матеріалів, медичній діагностиці, гідроакустичних системах та сейсморозвідці. Особливу увагу дослідників привертають задачі розсіювання хвиль на сукупності тіл, оскільки саме такі ситуації часто трапляються у природних і техногенних середовищах. Проте, незважаючи на велику кількість робіт, питання багатократного розсіювання хвиль залишаються складними через взаємодію між окремими розсіювачами та складність отримання точних аналітичних розв'язків. Актуальність теми зумовлена необхідністю розвитку узагальнених теоретичних моделей, які б враховували випадковий розподіл розсіювачів, їхню форму, розміри та акустичні властивості. Розв'язання цих питань сприятиме вдосконаленню методів моделювання акустичних процесів і підвищенню точності практичних застосувань у різних галузях науки та техніки.

Огляд сучасних джерел інформації за тематикою публікації

На відміну від розсіювання акустичних хвиль окремими тілами, практичні проблеми розсіювання на сукупності тіл досліджено менше. Одним із підходів до дослідження розсіювання на багатьох тілах є наближена теорія багатократного розсіювання на сукупності випадково розподілених розсіювачів, запропонована в [1] з урахуванням того, що мале м'яке тіло розсіювання є ізотропним. У [2] одержано точний аналітичний розв'язок задачі акустичного розсіювання у випадку двох однакових сфер. Метод бісферичних координат для низькочастотного розсіювання двома довільними м'якими сферами застосовано для отримання аналітичного розв'язку в [3]. Вплив симетрії розсіювача досліджено для задачі розсіювання двома однаковими сферами в [4].

Дослідження розсіювання плоскої хвилі на сфері, яка розташована на деякій відстані від іншої сфери та характеризується акустично малим радіусом, здійснено в [5], [6]. Низькочастотне багатократне розсіювання плоскої хвилі малими розсіювачами на основі методу T -матриці запропоновано в [7]. Комплексну теорію розсіювання хвиль на сукупності малих частинках довільної форми розроблено у [8], де подано аналітичні формули для розсіювання компонент акустичних та електромагнітних хвиль на частинках малого розміру.

Асимптотичний розв'язок задачі розсіювання акустичних хвиль на регулярно розміщених включеннях наведено в [8] за припущень $ka \ll 1$, $d = O(a^{1/3})$, $M = O(1/a)$, де a – радіус частинок; $k = 2\pi/\lambda$ – хвильове число; d – відстань між сусідніми частинками; M – загальна кількість частинок, вбудованих в обмежену область D . На границі S_m m -ї частинки D_m задано імпедансні граничні умови, які можна узагальнити так [9]:

$$v_m = f(x_m)/a^\beta, \quad d = O(a^{(2-\beta)/3}), \quad M = O(1/a^{2-\beta}), \quad \beta \in (0,1), \quad (1)$$

де v_m – поверхневий імпеданс; $f_m = f(x_m)$, $x_m \in D_m$, і $f(x)$ – довільна неперервна функція в $\bar{D}$, $\text{Im } h \leq 0$.

Поле v_0 , яке падає, задовольняє рівняння Гельмгольца у всьому просторі R^3 , а розсіяне поле – умови випромінювання на безмежності. Нехай малі включення D_m – кулі радіуса a з центрами в точках x_m , $1 \leq m \leq M$.

Виклад основного матеріалу

Розв'язання задачі розсіювання. Поле v_M , розсіяне сукупністю включень малого радіуса, поміщених в обмежену область D простору R^3 , задовольняє рівняння Гельмгольца

$$[\nabla^2 + k^2 n_0^2(x)]v_M = 0 \quad (2)$$

поза областями D_m , які відповідають включенням, n_0 – коефіцієнт рефракції. Граничні умови такі:

$$\frac{\partial v_M}{\partial N} = v_m v_M \quad \text{на } S_m, \quad 1 \leq m \leq M. \quad (3)$$

Загальне поле має вигляд

$$v_M = v_0 + u_M, \quad (4)$$

v_0 – розв'язок рівнянь (2), (3) для $M = 0$ (тобто за відсутності включень); поле, що падає, подамо у вигляді $e^{ik\alpha \cdot x}$, а u_M також задовольняє умови випромінювання на безмежності.

У роботі [8] встановлено єдиність розв'язку задачі (2)–(3), який має вигляд

$$v_M(x) = v_0(x) + \sum_{m=1}^M \int_{S_m} g(x, y) \sigma_m(y) dy, \quad (5)$$

де $g(x, y)$ – функція Гріна рівняння Гельмгольца у R^3 , тобто у випадку, коли $M = 0$.

Визначимо “ефективне поле” v_e , віднесене до m -го включення

$$v_e(x) := v_e(x, a) := v_e^{(m)}(x) := v_M(x) - \int_{S_m} g(x, y) \sigma_m(y) dy, \quad x \in R^3, \quad (6)$$

де функція $\sigma_m(y)$ – розв'язок інтегрального рівняння з [9] за умови $a \rightarrow 0$. Нехай $\Delta_p \subset D$ – довільна підобласть в D , а $N(\Delta_p)$ – кількість включень у Δ_p , яка визначається співвідношенням

$$N(\Delta_p) = \frac{1}{a^{2-\beta}} \int_{\Delta_p} N(x) dx [1 + \varepsilon], \quad a \rightarrow 0, \quad (7)$$

де $N(x) \geq 0$ – задана функція, неперервна в D ; ε – мале щодо одиниці число. В роботі [9] (теорема 1) одержано такий результат: $v_M(x)$ – границя поля $v_e(x)$, якщо $a \rightarrow 0$:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \|v_e(x) - v_M(x)\| = 0, \quad (8)$$

а $v_M(x)$ (позначимо його як $v(x)$) задовольняє рівняння

$$v(x) = v_0(x) - 4\pi \int_D g(x, y) f(y) N(y) v(y) dy. \quad (9)$$

Рівняння (9) – це рівняння для ефективного поля в середовищі, отримане включенням багатьох частинок малого розміру згідно із законом розміщення (7) [10].

Наближене подання ефективного поля. Щоб отримати явну формулу для ефективного поля v_e , перепишемо формулу (5)

$$v_M(x) = v_0(x) + \sum_{m=1}^M g(x, x_m) Q_m + \sum_{m=1}^M \int_{S_m} [g(x, y) - g(x, x_m)] \sigma_m(y) dy, \quad (10)$$

де

$$Q_m = \int_{S_m} \sigma_m(y) dy. \quad (11)$$

Використовуючи відому оцінку для функції Гріна $g(x, y)$ [8] й асимптотичну формулу для Q_m з [9], запишемо точну формулу (10) у вигляді

$$v_M(x) = v_0(x) + \sum_{m=1}^M g(x, x_m) Q_m + \varepsilon, \quad a \rightarrow 0, \quad |x - x_m| \geq a. \quad (12)$$

Значення $Q_m(x)$ визначається за асимптотичною формулою

$$Q_m = -4\pi f(x_m) v_e(x_m) a^{2-\beta} [1 + \varepsilon], \quad a \rightarrow 0, \quad (13)$$

а асимптотична формула для σ_m така

$$\sigma_m = -\frac{f(x_m) v_e(x_m)}{a^\beta} [1 + \varepsilon], \quad a \rightarrow 0. \quad (14)$$

Остаточно формула для ефективного поля $v_e(x)$ за $|x - x_j| \ll a$, з урахуванням властивостей другого доданка у формулі (10), має вигляд:

$$v_e^{(j)}(x) = v_0(x) - 4\pi \sum_{m=1, m \neq j}^M g(x, x_m) f(x_m) v_e(x_m) a^{2-\beta} \times [1 + \varepsilon]. \quad (15)$$

Отже, для визначення невідомих $v_e^{(j)}(x)$ ми отримали аналог системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з добре обумовленою матрицею, оскільки члени із особливостями у ядрі, відсутні, а на діагоналі містяться елементи, які переважають. Визначивши величини $v_e^{(j)}(x)$ за формулою (15), можемо визначити значення поля всюди поза областю включень, оскільки значення координати x не збігаються тут із жодною з координат x_m .

Для перевірки коректності формули (15) в практичних застосуваннях розв'язок задачі розсіювання, отриманий за її допомогою, необхідно порівняти з розв'язком рівняння (9), одержаного без використання асимптотичних умов. Це рівняння ефективно розв'язується методом колокацій і його розв'язок використовують як контрольний для такого порівняння.

Зведення задачі розсіювання до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Для обчислення ефективного поля v_e всюди поза областю D за формулою (15) величини $v_m := v_e(x_m)$ повинні бути відомими. Вони визначаються як розв'язки СЛАР:

$$v_j = v_{0j} - 4\pi \sum_{m=1, m \neq j}^M g(x_j, x_m) f(x_m) v_m a^{2-\beta}, \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (16)$$

Ця система ефективно розв'язується, оскільки відповідна матриця містить діагональні елементи, які переважають. У [10] встановлено також, що за достатньо малого a вона має єдиний розв'язок.

Щоб знайти розв'язки рівняння (9) для ефективного поля, можна використати метод колокацій [10], що приводить до СЛАР

$$v_j = v_{0j} - 4\pi \sum_{p=1, p \neq j}^P g(x_j, x_p) f(y_p) N(y_p) v(y_p) |\Delta_p|, \quad p=1, 2, \dots, P, \quad (17)$$

де P – кількість малих кубічних підобластей Δ_p ; y_p – центр Δ_p ; $|\Delta_p|$ – об'єм Δ_p . Виконуючи числові розрахунки, вважатимемо, що об'єднання Δ_p формує покриття D , а діаметр Δ_p – величина порядку $O(d^{1/2})$. З обчислювального погляду, розв'язання СЛАР (17) набагато простіше, ніж СЛАР (16), оскільки $P \ll M$.

Отже, маємо дві СЛАР, які відповідають рівнянню (9) й асимптотичній формулі (15). Розв'язуючи ці системи і порівнюючи розв'язки задач розсіювання, отримані на основі їхніх даних, можна оцінити межі застосування асимптотичного підходу [9] розв'язання задач акустичного розсіювання на сукупності включень малого розміру, на поверхні яких задано імпедансні граничні умови.

Результати та обговорення

Числові результати стосуються порівняння асимптотичного розв'язку, визначеного за допомогою СЛАР (16), із розв'язком (17), отриманим методом колокацій. Частинки вбудовані в однорідну область. Відстань між частинками визначають так, щоб виконувалася умова, яка забезпечує розв'язок СЛАР (16) із заданою точністю [11]. Одна із найпростіших таких умов

$$d = a^{2-\kappa} C, \quad (18)$$

де константу C вибрано так, щоб забезпечити добру обумовленість СЛАР (16).

Відносну похибку асимптотичного розв'язку задачі розсіювання, який визначається СЛАР (16), подано на рис. 1. Похибка визначається за формулою

$$\text{Rel.err.} = \max \left| \frac{v_{(16)} - v_{(17)}}{v_{(17)}} \right| \%, \quad (19)$$

де $v_{(16)}$ – розв'язок СЛАР (16); $v_{(17)}$ – розв'язок СЛАР (17) відповідно. Розв'язок СЛАР (17) вважається еталонним. Параметри задачі такі: хвильове число $k = 0.5 \text{ м}^{-1}$, $\kappa = 0.9$, розмір області D , в яку вбудовані частинки, дорівнює $4 \times 4 \times 4$ см, радіус a частинок змінюють для перевірки його оптимальних значень, якщо інші параметри задачі фіксовані. Розраховано залежність відносної похибки від параметра N (у загальному випадку це функція $N(x)$) (суцільні лінії) та виконано порівняння з випадком регулярно розподілених частинок (пунктирні лінії). Нерегулярний розподіл частинок забезпечено випадковим збуренням координат окремих частинок вздовж усіх координатних осей. Видно, що максимальна похибка досягається, якщо $N = 5$, і вона зменшується зі збільшенням N . Максимальна похибка становить 0,12 %, 0,01 %, 0,03 % та 0,10 %, 0,01 %, 0,02 % для дійсної, уявної частин та модуля поля v за нерегулярного та регулярного розподілів, що демонструє слабкий вплив на розподіл вбудованих частинок. Зворотна ситуація спостерігається у разі зменшення радіуса частинок. Дані моделювання для $a = 0.005$ наведено на рис. 2. У цьому випадку похибка нерегулярного розподілу частинок менша для всіх компонент поля v . Так, вона дорівнює 0,10 %, 0,01 %, 0,03 % та 0,05 %, 0,007 %, 0,027 % для дійсної, уявної частин та модуля поля за регулярного та нерегулярного розподілу частинок.

Істотніша різниця між похибками спостерігається під час дослідження їхньої залежності від відстані між частинками (див. рис. 3). Похибка для малих d доволі велика за нерівномірного розподілу частинок. Вона досягає 3,2 %, 0,43 % та 2,4 % для дійсної, уявної частин та модуля поля v . Це пояснюється тим, що збурення координат частинок призводить до розбіжності між дійсною відстанню та тією, що визначається формулою (18). Для обох випадків розподілу частинок існує оптимальне значення $d_{\max}$ [см] (максимальна відстань між частинками), для якого похибка є

максимальною. Це значення міститься між $d = 0,05$ см та $d = 0,06$ см. Відносна похибка повільно зростає зі збільшенням відстані $d_{\max}$.

Результати, пов'язані з дослідженням залежності похибки від радіуса a частинок, подано на рис. 4. Отримані дані підтверджують теоретичне припущення, яке стверджує, що збільшення a призводить до погіршення асимптотичного розв'язку. Зростання a призводить до істотного збільшення похибки, ця похибка особливо помітна для дійсної частини поля v . Варто зазначити, що це зростання особливо проявляється для випадку регулярного розміщення частинок; похибка збільшується втричі в розглянутому діапазоні a . Однак варто зауважити, що досягнуті похибки не перевищують десятка відсотків для решти компонент поля v .

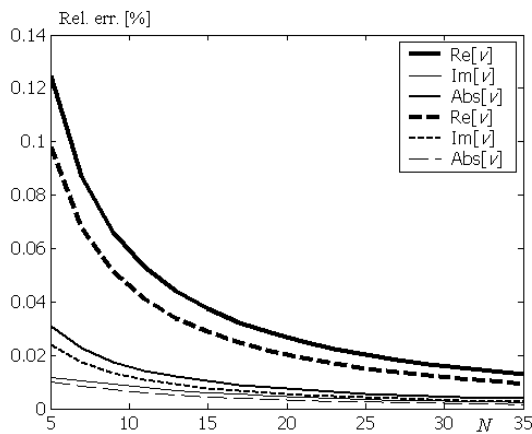


Рис. 1. Залежність відносної похибки асимптотичного розв'язку (16) від параметра N , $a = 0.01$

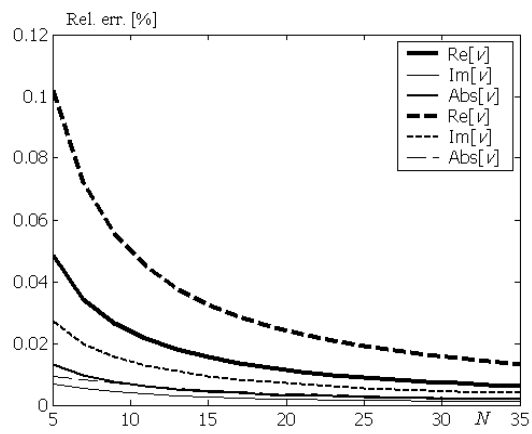


Рис. 2. Залежність відносної похибки асимптотичного розв'язку (16) від параметра N , $a = 0.005$

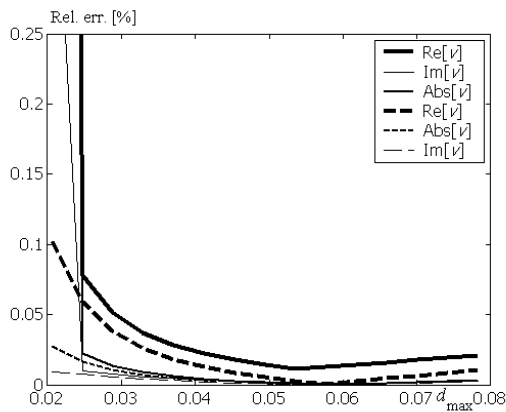


Рис. 3. Відносна похибка асимптотичного розв'язку (16) залежно від відстані $d_{\max}$ між частинками, $a = 0.01$

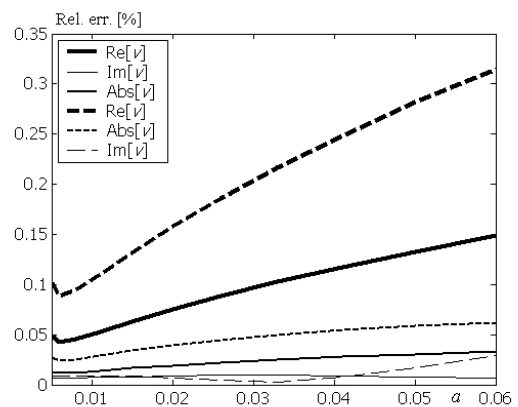


Рис. 4. Відносна похибка асимптотичного розв'язку (16) залежно від радіуса a частинок

Наступні дані пов'язані із дослідженням характеристик випромінювання розсіяного поля за фіксованих параметрів області, на якій відбувається дифракція акустичної хвилі. На рис. 5 подано повне розсіяне поле на відстані до дальньої зони $d_{\text{fz}} = 20$ см, кількість частинок в області D дорівнює 125, радіус a частинок – 0,005 м, значення v показані в площині $x_1 O x_2$ з розміром 20×20 см. Амплітуда поля, що падає, в цій області дорівнює одиниці. Видно, що амплітуда розсіяного поля не перевищує 0,001 порівняно з амплітудою поля, яке падає. Це пояснюється тим, що частинки

розміщені розріджено, а їхній радіус малий. Деяка несиметрія у розподілі поля є результатом нерівномірного розміщення частинок.

Результати, подані на рис. 6, показують, що амплітуда розсіяного поля істотно залежить від радіуса a частинок. Так, амплітуда розсіяного поля змінюється в діапазоні 0,01, тобто в рази більше, ніж у попередньому випадку. Форма розподілу поля подібна до попереднього випадку, оскільки частота випромінювання та геометрія області, в якій розміщені частинки, не змінюються.

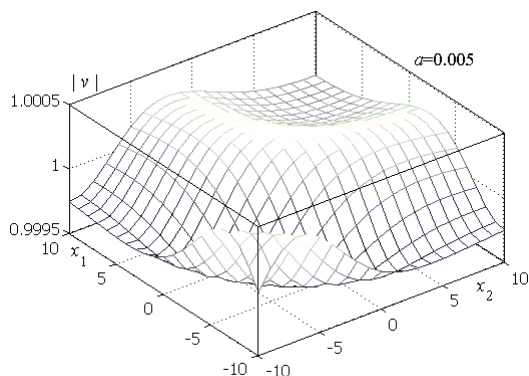


Рис. 5. Амплітуда розсіяного поля у дальній зоні:

$$d_{fz} = 20 \text{ см}, a = 0.5 \text{ см}$$

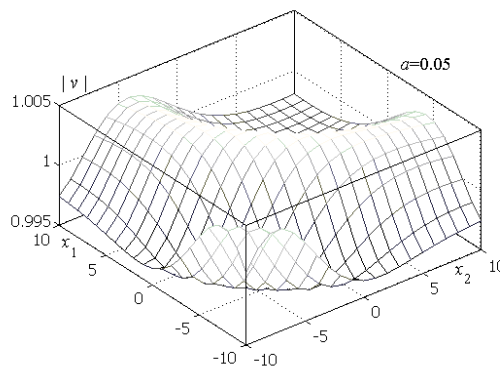


Рис. 6. Амплітуда розсіяного поля у дальній зоні:

$$d_{fz} = 20 \text{ см}, a = 5 \text{ см}$$

Як свідчать результати на рис. 7, відстань до дальньої зони є визначальною під час розгляду амплітуди поля. Графік показує амплітуду повного поля, якщо $d_{fz} = 60 \text{ см}$. Очевидно, що загальна зміна амплітуди розсіяного поля становить лише 0,005. Це не суперечить фізичному змісту розсіяного поля, оскільки амплітуда зменшується за відомим правилом, коли відстань до області розсіювання зростає.

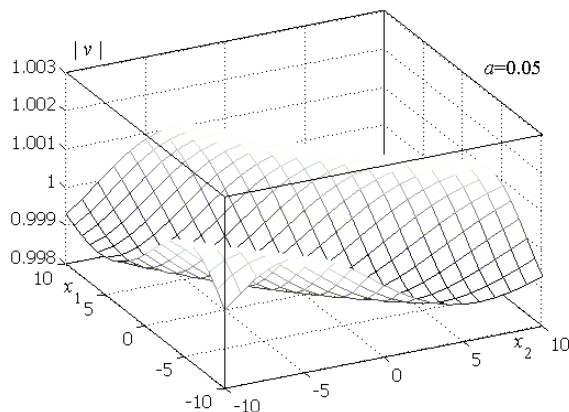


Рис. 7. Амплітуда розсіяного поля

$$\text{в дальній зоні, } d_{fz} = 0.6 \text{ м}, a = 0.05 \text{ м}$$

Дослідження залежності максимальної амплітуди поля від радіуса частинок відображено на рис. 8. Розрахунки виконано для різної кількості частинок, вбудованих у область D . Результати свідчать, що амплітуда зростає зі збільшенням радіуса частинок. Таке зростання найпомітніше для 729 частинок. Область D – куб з однаковою кількістю частинок вздовж усіх трьох осей. Результати підтверджують теоретичне припущення, що асимптотичний підхід краще працює за малих a .

На рис. 9 подано залежність максимальних значень $|v|$ від мінімальної відстані $d_{\min}$ для області з різною кількістю частинок. Тут розміри області D різні, оскільки мінімальна відстань $d_{\min}$

між частинками фіксована для всіх випадків. Максимальне значення досягається за найменшого $d_{\min}$ і зменшується зі зростанням $d_{\min}$. Значення для найменшого $d_{\min}$ дорівнюють 0,0005, 0,0002 та 0,00009 для $M = 729$, $M = 343$, і $M = 125$, відповідно. Отримані значення максимальної амплітуди для найбільшого $d_{\min}$ становлять 0,0001, 0,00005 та 0,00002. Результати свідчать про те, що випадок найменшої кількості частинок менш чутливий до зміни максимальної амплітуди розсіяного поля.

Результати числових розрахунків дають змогу вибрати оптимальні фізичні параметри області для створення матеріалу із бажаним коефіцієнтом рефракції. Теоретичне дослідження [12] демонструє можливість створення матеріалів із різним розподілом такого коефіцієнта, урахувавши його від'ємні значення. Надалі заплановано розроблення методу забезпечення таких значень коефіцієнта рефракції.

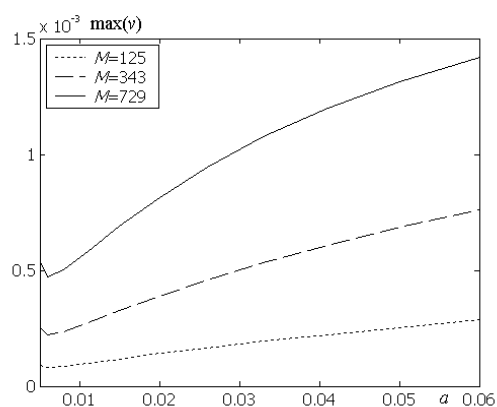


Рис. 8. Залежність максимального значення амплітуди поля від радіуса a включень

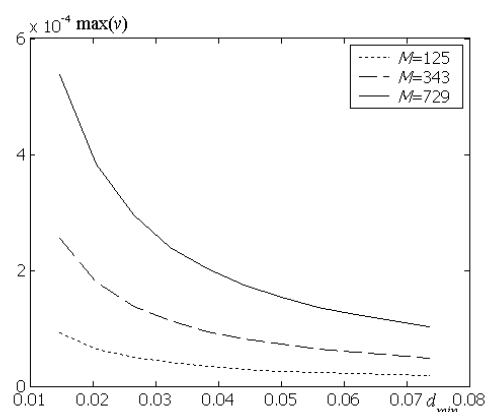


Рис. 9. Залежність максимального значення амплітуди поля від відстані $d_{\min}$ між включеннями

Висновки

Отримано явний розв'язок задачі акустичного розсіювання на сукупності малих частинок, вбудованих в однорідну область. Цей розв'язок порівняно із розв'язком, отриманим методом колокацій, який вважають еталонним, застосованим до відповідного інтегрального рівняння. Числові результати демонструють високу точність асимптотичного розв'язку, яка становить десяті частки відсотка порівняно із еталонним розв'язком. За результатами можна створити матеріал із бажаним коефіцієнтом рефракції, використовуючи отримані дані та розв'язуючи відповідну задачу оптимізації.

Перелік використаних джерел

- [1] L. L. Foldy, "The multiple scattering of waves I. General theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers", *Phys. Rev.*, 1945, Vol. 67, pp. 107–119.
- [2] G. C. Gaunaurd, H. Huang, "Acoustic scattering by a pair of spheres", *J. Acoust. Soc. Am.*, 1995, Vol. 98, pp. 495–507.
- [3] A. Charalambopoulos, G. Dassios, M. Hadjinicolaou, "An analytic solution for low-frequency scattering by two soft spheres", *SIAM J. Appl. Math.*, 1998, Vol. 58, pp. 370–386.
- [4] P. Gabrielli, M. Mercier-Finidori, "Acoustic scattering by two spheres: multiple scattering and symmetry considerations", *J. Sound Vibr.*, 2001, Vol. 241, pp. 423–439.
- [5] J. A. Roumeliotis, A. D. Kotsis, "Acoustic scattering from two spheres, one with a small radius", *Acoust. Phys.*, 2007, Vol. 53, pp. 33–43.
- [6] G. Kapodistrias, P. H. Dahl, "Effects of interaction between two bubble scatterers", *J. Acoust. Soc. Am.*, 2000, Vol. 107, No. 6, pp. 3006–3017.
- [7] P. A. Martin, "On the T-matrix for scattering by small obstacles", *J. Comput. Appl. Math.*, 2007, Vol. 204, pp. 219–230.

- [8] A. G. Ramm, *Wave Scattering by Small Bodies of Arbitrary Shapes*. Singapore: World Scientific, 2005.
- [9] A. G. Ramm, "Many Body Wave Scattering by Small Bodies and Applications", *J. Math. Phys.*, Vol. 48, pp. 103511–103511-7, October 2007.
- [10] A. G. Ramm, "Wave Scattering by Many Small Particles Embedded in a Medium", *Physics Letters A*, Vol. 372, pp. 3064–3070, April 2008.
- [11] M. I. Andriychuk and B. Ye. Yevstyhneiev, "Asymptotic method for solving the problem of scattering of electromagnetic fields by a set of small impedance particles", *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 287, No. 2, January, 2025, pp. 186–204. DOI 10.1007/s10958-025-07584-9.
- [12] A. G. Ramm, "A recipe for making materials with negative refraction in acoustics", *Phys. Lett. A*, 2008, Vol. 372, No. 13, pp. 2319–2321.

Borys Yevstyhneiev

Department of Numerical Methods of Mathematical Physics, Pidstryhach Institute
for Applied Problems of Mechanics and Mathematics. NASU, 3-b, Naukova str.,
Lviv, Ukraine, E-mail: molnerats@gmail.com, ORCID: 0000-0002-9674-0112

**SOLVING AN ACOUSTIC WAVE SCATTERING PROBLEM
ON A SET OF IRREGULAR DISTRIBUTED PARTICLES**

Received: August 20, 2025 / Revised: September 01, 2025 / Accepted: September 15, 2025

© Yevstyhneiev B., 2025

Abstract. An analytical-numerical approach to solving the problem of scattering of acoustic waves by many small particles is investigated, based on the assumption that the distance between them is greater than their radius. It is assumed that the distances between the particles can change, and this change can be specified in different ways. Impedance boundary conditions are specified at the particle boundaries. The results of numerical simulation show that the radiation characteristics of the constructed inhomogeneous region are sensitive to the way the particles are distributed. The results obtained can be used to create materials with a given refractive index.

Keywords. acoustic wave scattering, small particle, surface impedance, asymptotic approach; refractive index, numerical simulation.