

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ КВАНТОВОГО НАДЩІЛЬНОГО КОДУВАННЯ НА ОСНОВІ ЗАПЛУТАНИХ СТАНІВ

Петро Кравець

Національний університет „Львівська політехніка”,
кафедра інформаційних систем та мереж, м. Львів, Україна
E-mail: Petro.O.Kravets@lpnu.ua, ORCID: 0000-0001-8569-423X

© Кравець П., 2025

Метою дослідження є математичний аналіз квантового надщільного кодування на основі квантової заплутаності для підвищення ефективності та надійності передачі інформації в квантових комунікаційних системах. Суть квантового надщільного кодування полягає в здатності передавати два класичних біти інформації за допомогою одного кубіта, що входить до складу заплутаної пари.

Розглянуто фундаментальні принципи методу надщільного квантового кодування. Обґрунтовано актуальність дослідження у контексті розвитку безпечних квантових комунікацій та оптимізації передачі інформації в квантових мережах. Проведено огляд сучасних наукових публікацій, присвячених теоретичним засадам надщільного кодування, які вказують на потенціал розвитку та практичну перспективність цього напрямку квантової інформатики.

Аналіз математичного моделювання квантового надщільного кодування та декодування виконано із застосуванням двох альтернативних підходів – проєктивного вимірювання в базисі Белла та зворотного перетворення Белла. Показано, що обидва підходи дозволяють повністю відновити класичну інформацію, передану за допомогою заплутаних квантових станів. Перевагою зворотного перетворення Белла є простота реалізації на квантових пристроях, гнучкість та точність обробки інформації, можливість масштабування, що робить його доцільним вибором у багатьох практичних застосуваннях.

Вивчено вплив шумів та декогеренції на ефективність надщільного кодування, що є критичним чинником при практичній реалізації цього методу в реальних квантових системах. Побудовано математичну модель передачі даних через квантовий канал за умов дії адитивного білого шуму. Встановлено аналітичну залежність імовірності коректного відновлення інформації від рівня шуму, що дозволяє оцінити межі надійності надщільного кодування в зашумлених середовищах.

На основі проведеного дослідження окреслено перспективи практичного застосування надщільного кодування у квантових комунікаційних мережах, зокрема квантового Інтернету, а також у квантових обчисленнях та системах інформаційної безпеки. Отримані результати сприяють подальшому розвитку квантових технологій та можуть бути використані для створення нових протоколів високоефективної квантової передачі даних.

Ключові слова – квантова система, математична модель, квантове надщільне кодування, кубіт, суперпозиція станів, квантова заплутаність, вимірювання квантових станів, квантовий канал, білий шум.

Постановка проблеми

Розвиток квантових технологій відкриває нові можливості для передачі та обробки інформації, що особливо важливо з огляду на зростаючі вимоги до безпеки, швидкості та ефективності комунікаційних систем. Однією з фундаментальних концепцій квантової інформатики є надщільне

кодування (або суперщільне кодування від англ. *superdense coding*), яке дозволяє передавати два біти класичної інформації за допомогою одного кубіта, використовуючи заплутані стани. Це демонструє ключову перевагу квантових технологій – використання квантової заплутаності для підвищення пропускної здатності каналу зв'язку. Заплутаним називається стан квантової системи, який неможливо подати у вигляді тензорного добутку станів її підсистем.

Тоді як традиційні системи зв'язку наближаються до своїх фізичних обмежень, надщільне кодування відкриває шлях до створення нових комунікаційних протоколів, що поєднують високу швидкість і захищеність від підслуховування відповідно до принципів квантової механіки.

Актуальність дослідження квантових комунікацій зумовлена зростаючими вимогами до пропускної здатності класичних мереж, загрозами безпеці традиційних (доквантових) методів криптографії у зв'язку з розвитком квантових технологій, проблемами когерентності та впливу шумів у квантових каналах, а також необхідністю оптимізації протоколів передачі даних у квантових мережах.

Об'єктом дослідження є процеси квантової передачі інформації.

Предметом дослідження є моделі, методи та засоби надщільного квантового кодування даних.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у розширенні методології математичного аналізу процесів квантового надщільного кодування та декодування за рахунок застосування двох альтернативних підходів – проєктивного вимірювання в базисі Белла та зворотного перетворення Белла. Це дозволяє оцінити переваги та обмеження кожного методу при практичному впровадженні протоколів квантового зв'язку з підвищеною пропускною здатністю каналів як в ідеальному середовищі, так і за наявності шумів та декогеренції.

Практичне значення результатів дослідження полягає у можливості їх застосування для створення оптимізованих протоколів квантових комунікацій та вдосконалення методів передачі інформації у квантових мережах, що є актуальним для створення квантового Інтернету та систем інформаційної безпеки нового покоління.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Надщільне квантове кодування є одним із методів сучасної квантової інформатики, що ілюструє використання квантової заплутаності для підвищення ефективності передавання інформації. Метод надщільного кодування був задуманий Ч. Беннетом та С. Візнером ще на початку 1970-х років, але вперше опублікований ними лише у 1992 році (Bennett & Wiesner, 1992). Його суть полягає у використанні квантового заплутаного стану для передачі двох класичних бітів інформації, використовуючи лише один кубіт, що робить цей метод ефективнішим порівняно з класичними способами передачі інформації. Ця робота стала важливим етапом у становленні квантової інформаційної теорії.

Подальші дослідження зосереджувалися як на теоретичному вдосконаленні алгоритмів, так і на практичній реалізації надщільного кодування в експериментальних умовах. Зокрема, експериментальні підтвердження працездатності схеми були вперше реалізовані в оптичних системах з використанням фотонів (Mattle et al., 1996). Ця робота продемонструвала можливість фізичної реалізації схеми надщільного кодування в лабораторних умовах.

У теоретичному плані, низка публікацій розширила оригінальну ідею на багатовимірні квантові системи (qudits). Наприклад, у роботах (Lin, 2009; Yu et al., 2025; Zhao, 2024), розглядається узагальнення надщільного кодування на випадки, де використовуються багатовимірні заплутані стани, що дозволяє передавати більше класичних бітів за один переданий квантовий об'єкт. Ці підходи відкрили перспективу підвищення щільності інформації при передачі даних через квантовий канал.

У роботі (Li et al., 2025) дослідники представили 16-модовий квантовий фотонний чип – інтегральну оптичну платформу, що забезпечує контроль над шістнадцятьма оптичними модами, тобто незалежними шляхами або ступенями свободи поширення фотонів у квантовій схемі. Така багатомодова структура дає змогу генерувати восьмивимірний заплутаний стан з високою точністю (мірою фіделіті 0.973 ± 0.002). Запропонований підхід сприяє підвищенню пропускної здатності квантових

каналів, оскільки експериментально вдалося розрізнити одинадцять ортогональних станів Белла у восьмимірному гільбертовому просторі. У проведеному експерименті з фотонним чипом досягнуто пропускної здатності каналу 3.021 ± 0.003 біта, що перевищує максимальне теоретичне значення 3 біти для середовища без шуму.

Значна увага приділяється дослідженню впливу шуму та декогеренції на ефективність надщільного кодування. Так, у роботах (Bowen, & Bose, 2001; Shadman, et al., 2012; Wang, & He, 2024) досліджувалися різні моделі квантових шумів, такі як деполяризуючий шум, фазовий шум і амплітудна декогеренція, що впливають на надійність передачі інформації. Було показано, що надмірне зашумлення суттєво знижує ефективність схеми, що ставить завдання розробки коригувальних кодів або більш стійких протоколів.

У рамках безпеки передачі даних, надщільне кодування розглядається як складова квантових протоколів, здатних забезпечити виявлення атак типу “людина посередині” (Chen, 2025). Завдяки тому, що вимірювання переданого кубіта порушує квантовий стан, стороннє втручання можна однозначно виявити, що використовується у проєктах побудови квантових мереж із гарантованим виявленням перехоплення. У роботі (Deb, Mandal, & Sen, 2025) розроблено новий протокол квантового розподілу ключів, який використовує концепцію надщільного кодування для спільного використання ключа шифрування методом одноразового блокнота. Проведене моделювання встановлює застосовність протоколу та показує його ефективність у виявленні спроб підслуховування.

Сучасні дослідження також зосереджені на реалізації надщільного кодування у твердотільних платформах, зокрема в надпровідних кубітах та квантових точках, що дозволяє наблизити практичне використання цієї технології в умовах реальних квантових процесорів. У статті (Arslan et al., 2024) представлено схему квантового надщільного кодування через гіперзаплутані атоми, створені за допомогою квантової електродинаміки порожнин. Цей підхід використовує кілька ступенів свободи для додаткового рівня безпеки при передачі інформації.

Дослідження (Aiache et al., 2024) розглядає вплив зворотного потоку інформації в протоколі надщільного кодування через немарковську динаміку. Автори досліджують різні параметри, такі як температура та декогеренція, для оцінки ефективності надщільного кодування в таких умовах.

У роботі (Patra et al., 2024) проводиться аналогія між класичними комунікаційними каналами зі спільно розділеною випадковістю та квантовим надщільним кодуванням. Автори розглядають клас двосторонніх комунікаційних ігор і показують, що ці ігри неможливо виграти, використовуючи безшумний однобітний класичний канал без попередньо розділених квантових або класичних кореляцій. Натомість досягти успіху можна, якщо канал супроводжується класичною спільною випадковістю. Це нагадує ефект, подібний до явища квантового надщільного кодування, де попередня заплутаність підвищує пропускну здатність та надійність квантового каналу зв'язку.

Окремий напрям досліджень становлять роботи з розробки та аналізу протоколів обміну повідомленнями між кількома абонентами з використанням надщільного кодування для побудови квантових QKD-мереж (Quantum Key Distribution Networks) або квантового Інтернету (Sasaki, 2017). У дослідженні (Jensen et al., 2025) запропоновано узагальнення одностороннього надщільного кодування до двосторонніх комунікаційних протоколів для передачі класичних бітів з використанням заплутаних квантових пар. Протокол спрямований на підвищення ефективності використання ресурсів та пропускної здатності в квантових мережах.

Отже, надщільне квантове кодування розвивається в кількох ключових напрямках: теоретичне узагальнення на багатовимірні системи, дослідження стійкості до шумів, експериментальна реалізація в різних фізичних платформах, а також впровадження в багатокористувацькі та захищені протоколи квантового зв'язку.

Ці дослідження підкреслюють активний розвиток технологій надщільного кодування, вказують на їх потенціал у створенні більш ефективних і безпечних квантових комунікаційних систем, свідчать про актуальність і практичну перспективність цього напрямку квантової інформатики.

Вивчення квантових обчислень, зокрема методів надщільного кодування, набуває особливого значення в сучасних університетських наукових дослідженнях та в освітньому процесі (Krokhmal'skyi, 2018; Ostapov et al., 2022). З огляду на стрімкий розвиток квантових технологій, формування базисних знань з квантової інформатики є ключовим для підготовки фахівців нового покоління у сферах ІТ, математики, фізики та інженерії. Метод надщільного кодування не лише ілюструє фундаментальні принципи квантової механіки, такі як запутаність і проєктивне вимірювання, але й демонструє приклад реального використання цих явищ для підвищення ефективності обміну інформацією. Включення таких тем до навчальних програм сприяє формуванню міждисциплінарних знань і практичних навичок, необхідних для розуміння і застосування сучасних інформаційних технологій.

Формулювання цілі статті

Метою цієї роботи є аналіз математичної моделі квантового надщільного кодування на основі використання квантової запутаності для підвищення ефективності та надійності передачі інформації в квантових комунікаційних системах та забезпечення оптимального використання квантових ресурсів.

Для досягнення зазначеної мети необхідно вирішити такі **основні завдання дослідження**:

- дослідити принципи квантової запутаності та її застосування у надщільному кодуванні;
- здійснити математичний опис протоколу надщільного кодування з використанням операторів квантової механіки;
- проаналізувати вплив унітарних операторів (CNOT, Hadamard, Pauli X/Z) на запутані стани;
- розглянути альтернативні способи декодування запутаних станів – проєктивне вимірювання у базисі Белла та зворотне перетворення Белла;
- визначити сфери та перспективи застосування квантового надщільного кодування.

Виконання цих завдань дозволить провести аналіз та математичне моделювання квантового надщільного кодування, що може бути використано для покращення квантових комунікаційних систем та їх інтеграції у квантові мережі.

Матеріали і методи дослідження. Для дослідження проблеми надщільного кодування застосовано методи математичного моделювання, аналітичного аналізу квантових станів та символічних перетворень. Основу становить формалізм квантових станів у вигляді векторів стану, а також операційне представлення унітарних перетворень та проєктивних вимірювань у базисі Белла.

Для моделювання процесу кодування та декодування використовувалися:

- пряме перетворення Белла за допомогою послідовного застосування оператора Адамара (H-оператор для переведення кубіта у стан суперпозиції) та оператора CNOT (для формування запутаного стану Белла);
- модель запутаного квантового стану, який не можна подати у вигляді тензорного добутку станів окремих підсистем;
- стандартні стани Белла як базисні вектори для двокубітних систем;
- оператори Паулі (I, X, Z, ZX) як засоби кодування двох класичних бітів в один переданий кубіт за допомогою унітарних перетворень;
- оператори проєктивного вимірювання стану кубіта;
- зворотне перетворення станів Белла у стандартні двокубітні базисні стани за допомогою послідовного застосування операторів CNOT та Адамара;
- модель квантового каналу, що допускає односторонню передачу одного кубіта із заздалегідь створеної запутаної пари;
- розрахунок імовірностей успішного декодування інформації після передачі через квантовий канал.

Для оцінювання ефективності методу у порівнянні з класичними протоколами, було розглянуто:

- кількість кубітів, що фізично передаються через канал;
- обсяг класичної інформації, яку можливо передати за допомогою квантових операцій;
- показники пропускної здатності каналу при використанні надщільного кодування.

Моделювання квантових станів і дій унітарних операторів здійснювалося шляхом аналітичного перетворення станів кубітів, що дало змогу перевірити коректність операцій кодування, передачі та декодування даних як в умовах ідеального квантового середовища, так і за наявності білого шуму в квантовому каналі.

Виклад основного матеріалу

Модель надщільного кодування. Надщільне кодування – це метод у квантових комунікаціях, який використовує властивості квантових систем для досягнення максимальної ефективності при передачі інформації. Його основна ідея полягає в тому, щоб за допомогою заплутаної пари кубітів передавати два класичних біти інформації, використовуючи лише один кубіт для передачі.

Для реалізації методу надщільного кодування необхідні дві сторони, які бажають передати між собою двобітове повідомлення, квантовий канал та пара заплутаних кубітів. У системах телекомунікації учасників зв'язку традиційно називають Алісою (абонент А) та Бобом (абонент В).

Алгоритм квантового надщільного кодування полягає у такому:

1. Відправник (Аліса) хоче передати отримувачу (Бобу) два біти класичної інформації.
2. Для цього створюється пара заплутаних кубітів А та В у стані Белла. Один кубіт (А) передається Алісі, а інший (В) – Бобу через надійний квантовий канал зв'язку, що забезпечує збереження когерентності квантових станів.
3. Відправник (Аліса) застосовує до свого кубіта одне з чотирьох квантових перетворень (I, X, Z, ZX), кожне з яких відповідає певному значенню двох класичних бітів. Це змінює загальний стан системи із двох заплутаних кубітів так, що він переходить в один із чотирьох станів Белла.
4. Потім Аліса надсилає свій перетворений кубіт Бобу через квантовий канал зв'язку.
5. Боб, маючи обидва кубіти, проводить вимірювання у базисі Белла, що дозволяє йому однозначно визначити комбінацію двох класичних бітів, які надіслала Аліса.

Формально заплутаний стан пари кубітів можна створити послідовним застосуванням операторів Адамара (H) та керованого заперечення CNOT.

Нехай два кубіти А та В знаходяться у початковому базисному стані

$$|\psi\rangle = |0_A 0_B\rangle.$$

Оператор Адамара застосовується до кубіта А для переведення його у стан рівномірної суперпозиції:

$$H|0_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A\rangle + |1_A\rangle). \quad (1)$$

Після застосування H-оператора (1) до першого кубіта, система з двох кубітів переходить у стан:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A\rangle + |1_A\rangle) \otimes |0_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A 0_B\rangle + |1_A 0_B\rangle), \quad (2)$$

де $\otimes$ - операція тензорного добутку.

Для створення запутаності між кубітами використовується оператор керованого заперечення CNOT, для якого кубіт А є керуючим, а кубіт В – цільовим. Якщо керуючий кубіт дорівнює 1, то цільовий кубіт інвертується. Застосування оператора CNOT до стану (2) дає запутаний стан Белла (EPR-пару):

$$\Phi^+ = \text{CNOT} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A 0_B\rangle + |1_A 0_B\rangle) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A 0_B\rangle + |1_A 1_B\rangle). \quad (3)$$

Нехай кубіт А є у розпорядженні відправника (Аліси), а кубіт В належить отримувачу повідомлення (Бобу). Зміна одного кубіта запутаної пари миттєво впливає на інший кубіт.

З допомогою запутаних кубітів Аліса бажає передати два класичних біти інформації Бобу, не надсилаючи їх безпосередньо.

Далі відбувається кодування класичної інформації. Для цього відправник повідомлення Аліса вибирає два біти для передачі. Залежно від значення цих бітів, вона застосовує одну з чотирьох можливих операцій над своїм кубітом А.

Якщо повідомленням є 00, то відправник нічого не змінює (застосовує оператор І до кубіта А), залишаючи кубіт у початковому стані:

$$I|0_A\rangle = |0_A\rangle, \quad I|1_A\rangle = |1_A\rangle.$$

Стан системи $|\Phi^+\rangle$ (3) після цього не зміниться.

Якщо повідомленням є 01, то відправник застосовує Х-оператор Паулі (оператор NOT), який інвертує стан кубіта А:

$$X|0_A\rangle = |1_A\rangle, \quad X|1_A\rangle = |0_A\rangle.$$

Стан системи зміниться на такий:

$$(X \otimes I)|\Phi^+\rangle = (X \otimes I) \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A 0_B\rangle + |1_A 1_B\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1_A 0_B\rangle + |0_A 1_B\rangle) = \Psi^+. \quad (4)$$

Якщо повідомленням є 10, то відправник застосовує Z-оператор Паулі, який інвертує фазу кубіта А:

$$Z|0_A\rangle = |0_A\rangle, \quad Z|1_A\rangle = -|1_A\rangle.$$

Стан системи зміниться на такий:

$$(Z \otimes I)|\Phi^+\rangle = (Z \otimes I) \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A 0_B\rangle + |1_A 1_B\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A 0_B\rangle - |1_A 1_B\rangle) = \Phi^-. \quad (5)$$

Якщо повідомленням є 11, то відправник застосовує обидва оператори Х та Z до кубіта А:

$$ZX|0_A\rangle = Z(X|0_A\rangle) = Z(|1_A\rangle) = -|1_A\rangle, \quad ZX|1_A\rangle = Z(X|1_A\rangle) = Z(|0_A\rangle) = |0_A\rangle.$$

Стан системи зміниться на такий:

$$(ZX \otimes I)|\Phi^+\rangle = (ZX \otimes I) \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A 0_B\rangle + |1_A 1_B\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-|1_A 0_B\rangle + |0_A 1_B\rangle) = \Psi^-. \quad (6)$$

Отже, квантова запутаність гарантує, що після дій Аліси система залишається в одному зі станів Белла $\psi \in \{\Phi^+, \Phi^-, \Psi^+, \Psi^-\}$, які описуються виразами (3) – (6).

Після застосування відповідної операції відправник передає свій кубіт А до отримувача через квантовий канал – фізичний засіб, що дозволяє передавати кубіти між сторонами, зберігаючи їхню квантову природу. Прикладами таких каналів можуть бути: оптичне волокно для передачі фотонів;

відкрита оптична лінія (лазерний промінь); коаксіальні або надпровідникові лінії для передавання мікрохвильових сигналів між надпровідниковими кубітами. Квантовий канал відрізняється від класичного тим, що дозволяє передавати кубіти, які можуть бути у суперпозиції та заплутаних станах.

Тепер у розпорядженні Боба є два кубіти: отриманий від відправника кубіт А та власний кубіт В із заплутаної пари.

Щоб декодувати надіслане з допомогою цих кубітів повідомлення отримувач Боб виконує проєктивне вимірювання двох кубітів (А, В) у базисі Белла:

$$|\Phi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle), \quad |\Psi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle).$$

Для вимірювання у базисі Белла отримувач повідомлення формує такі проєкційні оператори:

$$\Pi_{\Phi^+} = |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|, \quad \Pi_{\Phi^-} = |\Phi^-\rangle\langle\Phi^-|, \quad \Pi_{\Psi^+} = |\Psi^+\rangle\langle\Psi^+|, \quad \Pi_{\Psi^-} = |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|. \quad (7)$$

Імовірність вимірювання одного зі станів Белла за допомогою проєкційних операторів (7) визначається скалярним добутком:

$$\text{Pr}(i) = \langle\psi|\Pi_i|\psi\rangle,$$

де $i \in \{\Phi^+, \Phi^-, \Psi^+, \Psi^-\}$ – індекс проєкційного оператора; $\psi \in \{\Phi^+, \Phi^-, \Psi^+, \Psi^-\}$ – стан перед вимірюванням.

Застосування оператора проєкції $\Pi_i = |i\rangle\langle i|$ ($i \in \{\Phi^+, \Phi^-, \Psi^+, \Psi^-\}$) змінює стан пари кубітів (А, В) на такий:

$$|\psi'\rangle = \Pi_i |\psi\rangle / \sqrt{\text{Pr}(i)}. \quad (8)$$

Результат вимірювання стану (8) буде залежати від того, який з цих проєкторів застосовано, що дозволяє отримувачу декодувати два біти інформації, надіслані відправником.

Оскільки базис Белла є ортонормованим, то після проєкції на один із базисних станів, отримаємо саме цей стан, який кодує передані біти:

$$|\psi'\rangle = |i\rangle, \quad (9)$$

де $\psi \in \{\Phi^+, \Phi^-, \Psi^+, \Psi^-\}$.

Тобто вимірювання у базисі Белла дає той стан Белла (9), який був після дій Аліси до операції вимірювання, і за яким легко відновити передані біти. Стан Белла був використаний як маркер, що позначає пари класичних бітів.

Отже, результати вимірювання дозволяють визначити, які 2 біти інформації надіслав відправник:

1. Якщо результатом вимірювання є стан $|\Phi^+\rangle$, то відправник надіслав 00.
2. Якщо результатом вимірювання є стан $|\Psi^+\rangle$, то відправник надіслав 01.
3. Якщо результатом вимірювання є стан $|\Phi^-\rangle$, то відправник надіслав 10.
4. Якщо результатом вимірювання є стан $|\Psi^-\rangle$, то відправник надіслав 11.

Приклад. Розглянемо конкретний приклад із повним обчисленням нового стану після вимірювання. Припустимо, що початковий заплутаний стан кубітів Аліси та Боба – це стан Белла $|\Phi^+\rangle$:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle).$$

Наприклад, нехай Аліса хоче передати Бобу два класичних біти 10. Це означає, що Аліса застосовує до свого кубіта оператор Z і тим самим робить зміну його фази:

$$(Z \otimes I)|\Phi^+\rangle = (Z \otimes I)\frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A 0_B\rangle + |1_A 1_B\rangle).$$

Застосування оператора I запобігає поширенню дії на кубіт Боба.

Застосуємо оператор Z до першого кубіта:

$$(Z \otimes I)|0_A 0_B\rangle = |0_A 0_B\rangle, (Z \otimes I)|1_A 1_B\rangle = -|1_A 1_B\rangle$$

Отже, отримуємо такий змінений стан системи:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A 0_B\rangle - |1_A 1_B\rangle) = |\Phi^-\rangle.$$

Тобто, після дій Аліси пара кубітів перейшла у стан $|\Phi^-\rangle$.

Після отримання кубіта A від Аліси через квантовий канал Боб виконує проєктивне вимірювання в базисі Белла $\{\Phi^+, \Phi^-, \Psi^+, \Psi^-\}$.

Обчислимо імовірності проєктивного вимірювання стану $|\Phi^-\rangle$, що був отриманий після дій Аліси:

$$\text{Pr}(\Phi^+) = \langle \Phi^- | \Pi_{\Phi^+} | \Phi^- \rangle = \left| \langle \Phi^+ | \Phi^- \rangle \right|^2.$$

Обчислимо скалярний добуток переходом до двокубітних станів:

$$\langle \Phi^+ | \Phi^- \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 00 | + \langle 11 |) \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle).$$

Розкриємо вираз, враховуючи ортонормованість стандартного двокубітного базису векторів:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 00 | + \langle 11 |) \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) = \frac{1}{2}(\langle 00 | 00 \rangle - \langle 00 | 11 \rangle + \langle 11 | 00 \rangle - \langle 11 | 11 \rangle) = \frac{1}{2}(1 - 0 + 0 - 1) = 0.$$

Тобто, $\text{Pr}(\Phi^+) = 0$.

Аналогічно обчислимо:

$$\text{Pr}(\Phi^-) = \langle \Phi^- | \Pi_{\Phi^-} | \Phi^- \rangle = \left| \langle \Phi^- | \Phi^- \rangle \right|^2 = 1,$$

$$\text{Pr}(\Psi^+) = \langle \Phi^- | \Pi_{\Psi^+} | \Phi^- \rangle = \left| \langle \Psi^+ | \Phi^- \rangle \right|^2 = 0,$$

$$\text{Pr}(\Psi^-) = \langle \Phi^- | \Pi_{\Psi^-} | \Phi^- \rangle = \left| \langle \Psi^- | \Phi^- \rangle \right|^2 = 0.$$

Звідси отримаємо, що з імовірністю 1 Боб виміряє стан Φ^- . Дійсно, враховуючи стан системи до вимірювання $|\psi\rangle = |\Phi^-\rangle$, після застосування проєкційного оператора $\Pi_{\Phi^-} = |\Phi^-\rangle\langle\Phi^-|$ отримаємо новий стан системи після вимірювання:

$$|\psi'\rangle = \Pi_{\Phi^-} |\psi\rangle / \sqrt{\text{Pr}(\Phi^-)} = |\Phi^-\rangle\langle\Phi^-|\Phi^-\rangle / \sqrt{1} = |\Phi^-\rangle.$$

Отже, після вимірювання стан системи колапсує в Φ^- , що однозначно відповідає переданим класичним бітам 10.

Зворотне перетворення Белла. На практиці виконати проєкційне вимірювання у базисі Белла технічно складно, оскільки воно вимагає побудови квантових вентилів для реалізації проєкційних операторів та може бути більш чутливим до помилок і шуму.

Тому, замість проєктивного вимірювання в базисі Белла, використовують зворотне перетворення Белла.

Система кодування бітів на стороні Аліси залишається попередньою. Якщо потрібно передати: 00 – ніяких змін стану робити не потрібно; 01 – застосувати оператор X (NOT); 10 – застосувати оператор Z; 11 – застосувати оператор ZX.

Після застосування цих операторів заплутаний стан переходить в один із чотирьох станів Белла:

$$|\Phi^+\rangle \text{ для } 00; |\Psi^+\rangle \text{ для } 01; |\Phi^-\rangle \text{ для } 10; |\Psi^-\rangle \text{ для } 11.$$

Зворотне перетворення Белла полягає у застосуванні таких квантових операцій: 1) CNOT – керуване заперечення, застосоване до пари кубітів (A, B), де кубіт A – керуючий, а кубіт B – цільовий; 2) H – оператор Адамара, застосований до кубіта A.

Після цих операцій стани Белла перетворюються у стандартні двокубітні базисні стани:

$$\begin{aligned} H_A CNOT_{AB} |\Phi^+\rangle &= |00\rangle, H_A CNOT_{AB} |\Phi^-\rangle = |10\rangle, \\ H_A CNOT_{AB} |\Psi^+\rangle &= |01\rangle, H_A CNOT_{AB} |\Psi^-\rangle = |11\rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

Нехай, як і раніше, Аліса передає Бобу біти 10, що відповідає стану $|\Phi^-\rangle$. Виконаємо декодування цього стану згідно з (10):

$$\begin{aligned} H_A CNOT_{AB} |\Phi^-\rangle &= H_A CNOT_{AB} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A 0_B\rangle - |1_A 1_B\rangle) = H_A \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A 0_B\rangle - |1_A 0_B\rangle) = \\ &= H_A \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A\rangle - |1_A\rangle) |0_B\rangle = |1_A\rangle |0_B\rangle = |1_A 0_B\rangle. \end{aligned} \quad (11)$$

При перетворенні виразу враховано оборотність дії оператора H:

$$H \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A\rangle + |1_A\rangle) = |0_A\rangle, H \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A\rangle - |1_A\rangle) = |1_A\rangle.$$

Наступне вимірювання стану (11) у стандартному базисі $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ безпомилково відновлює передану інформацію.

Формально, процес вимірювання двокубітних стану $|\psi\rangle \in \{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ у базисі $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ можна записати за допомогою проєкційних операторів:

1) проєкційні оператори для вимірювання першого кубіта:

$$\Pi_0^{(1)} = |0\rangle\langle 0| \otimes I, \Pi_1^{(1)} = |1\rangle\langle 1| \otimes I;$$

2) проєкційні оператори для вимірювання другого кубіта:

$$\Pi_0^{(2)} = I \otimes |0\rangle\langle 0|, \Pi_1^{(2)} = I \otimes |1\rangle\langle 1|.$$

Оператор I позначає одиничну матрицю і використовується для виділення стану тільки одного потрібного кубіта із двокубітного стану.

Імовірності вимірювання станів для кубіта $k \in \{1, 2\}$ будуть такими:

- $\Pr(0) = \langle \psi | \Pi_0^{(k)} | \psi \rangle$ – імовірність отримати 0;
- $\Pr(1) = \langle \psi | \Pi_1^{(k)} | \psi \rangle$ – імовірність отримати 1.

Так, для стану $\psi = |10\rangle$ отримаємо такі імовірності:

1) вимірювання першого кубіта:

$$\Pr(0) = \langle 10 | (|0\rangle\langle 0| \otimes I) | 10 \rangle = 0, \quad \Pr(1) = \langle 10 | (|1\rangle\langle 1| \otimes I) | 10 \rangle = 1;$$

2) вимірювання другого кубіта:

$$\Pr(0) = \langle 10 | (I \otimes |0\rangle\langle 0|) | 10 \rangle = 1, \quad \Pr(1) = \langle 10 | (I \otimes |1\rangle\langle 1|) | 10 \rangle = 0.$$

У результат декодування заносяться значення тих бітів, імовірність вимірювання яких дорівнює 1. За отриманими значеннями імовірностей визначаємо, що передане від Аліси до Боба значення бітів дорівнює 10.

Вплив шуму на квантовий канал. Зашумленість квантового каналу призводить до зниження імовірності правильного декодування повідомлення на стороні отримувача. Для прикладу, нехай квантовий канал між Алісою і Бобом піддається дії адитивного білого шуму, що моделюється як змішування ідеального стану з повною деполяризацією:

$$\rho'_i = (1 - \mu)\rho_i + \mu \frac{I}{4}, \quad (12)$$

де $\rho_i = |i\rangle\langle i|$ ($i \in \{\Phi^+, \Phi^-, \Psi^+, \Psi^-\}$) – матриця щільності імовірності після дій Аліси; $\mu \in [0, 1]$ – коефіцієнт шуму; I – одинична матриця 4×4 ; $I/4$ – матриця шуму (повністю змішаний стан).

Боб здійснює проєктивне вимірювання стану (12) у базисі Белла. Імовірність цього вимірювання:

$$\Pr(i) = \text{Tr}(\Pi_i \cdot \rho'_i), \quad (13)$$

де $\Pi_i = |i\rangle\langle i|$ – оператор проєкції на один зі станів Белла; $\text{Tr}(\cdot)$ – слід матриці.

Після підстановки ρ'_i (12) у вираз (13) отримаємо:

$$\Pr(i) = \text{Tr}(\Pi_i \cdot ((1 - \mu)\rho_i + \mu \cdot I/4)) = (1 - \mu)\text{Tr}(\Pi_i \cdot \rho_i) + \frac{\mu}{4}\text{Tr}(\Pi_i \cdot I). \quad (14)$$

Враховуючи, що $\rho_i = \Pi_i$ при вимірюванні закодованого стану, і для чистого стану виконується $\rho_i^2 = \rho_i$, то в силу нормалізації амплітуд імовірностей отримаємо:

$$\text{Tr}(\Pi_i \cdot \rho_i) = \text{Tr}(\rho_i^2) = \text{Tr}(\rho_i) = 1.$$

Оскільки Π_i є проєкцією на один з чотирьох ортогональних станів, то

$$\text{Tr}(\Pi_i \cdot I) = 1.$$

Підстановка обчислених множників у (14) дає таке значення імовірності вимірювання стану (12) у базисі Белла:

$$\Pr(i) = (1 - \mu) + \frac{\mu}{4} = 1 - \frac{3\mu}{4}. \quad (15)$$

У цій моделі імовірність (15) успішного декодування стану лінійно залежить від рівня шуму μ квантового каналу (рис. 1). Вплив адитивного білого шуму на квантовий канал зумовлює зниження імовірності правильного розпізнавання стану на стороні Боба.

Надщільне кодування вигідне лише тоді, коли кількість правильно декодованої інформації в середньому перевищує класичну межу в 1 біт на один переданий кубіт. Для надщільного кодування ця межа становить 2 біти на 1 переданий кубіт. Якщо $\mu = 0$, то передача ідеальна, і $\Pr(i) = 1$. Але зі зростанням шуму точність декодування падає, і при $\mu > 1/3$ протокол стає менш ефективним за класичну межу $\Pr(i) = 0.75$.

Отримана залежність може слугувати основою для оцінювання надійності надщільного кодування в умовах реального фізичного середовища зі складнішими шумовими впливами, такими як фазові та декогерентні порушення.

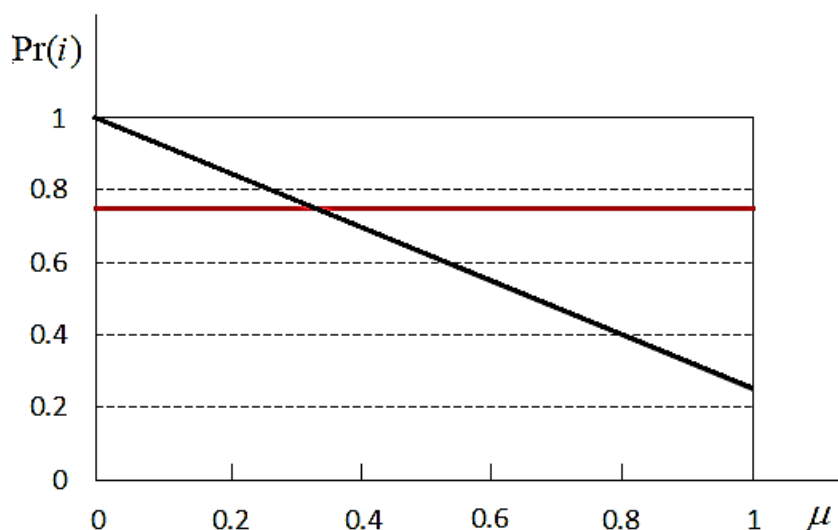


Рис. 1. Залежність ймовірності успішного декодування від рівня шуму

Обговорення результатів дослідження. Математичне моделювання надщільного кодування продемонструвало, що метод дозволяє передати два біти інформації за допомогою одного кубіта із запутаної пари.

Фактично, для передачі двох класичних бітів потрібна одна запутана пара кубітів, що на перший погляд не забезпечує суттєвої економії квантових ресурсів. Проте варто враховувати, що створення квантових частинок не є надто затратним або дороговартісним процесом. Значно складнішим і ресурсозатратнішим є підтримання стабільного стану квантового каналу зв'язку, а також забезпечення його захисту від шумів і декогеренції. У цьому контексті ефективність методу визначається не загальною кількістю кубітів у системі передачі даних, а саме кількістю кубітів, які фізично передаються через квантовий комунікаційний канал. Передача тільки одного кубіта із заделегідь підготовленої запутаної пари еквівалентна передачі двох класичних бітів. Значить, за допомогою n кубітів квантовим каналом можна передати $2n$ класичних бітів інформації. За ідеальних умов, тобто за відсутності шумів і декогеренції, це фактично дозволяє подвоїти пропускну здатність квантового каналу зв'язку порівняно з класичною передачею. Цей показник можна покращити при використанні багатовимірних заплутаних станів.

Застосування зворотного перетворення Белла на стороні отримувача забезпечує декодування з меншою апаратною складністю порівняно з безпосереднім проєктивним вимірюванням у базисі Белла. У традиційному підході для вимірювання у базисі Белла потрібні складні багатокубітні проєктивні операції. Натомість зворотне перетворення Белла полягає у застосуванні послідовності унітарних гейтів CNOT та H для перетворення одного зі станів Белла у стандартний двокубітний базис, після чого достатньо стандартного однокубітного вимірювання у базисі $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Фізична реалізація через гейти CNOT та H є простішою, ніж побудова квантових вентилів для проєкційних операторів. Це дозволяє зменшити кількість багатокубітних операцій та ускладнення апаратури, зберігаючи точність декодування, оскільки унітарне перетворення повністю переводить закодовану інформацію у окремі базисні стани. Отже, метод зворотного перетворення Белла є більш практичним для реалізації в сучасних квантових системах і масштабованих квантових мережах.

Надщільне кодування є тісно пов'язане з квантовою телепортацією, але між ними є суттєва різниця. В обох методах використовуються принцип суперпозиції станів та заплутані пари кубітів. Квантова телепортація дозволяє передати один кубіт, використовуючи два класичні біти. Надщільне кодування, навпаки, забезпечує передачу двох класичних бітів за допомогою одного кубіта із заплутаної пари. Це дозволяє розглядати надщільне кодування як обернену версію квантової телепортації.

Оскільки надщільне кодування використовує квантову запутаність, воно є більш стійким до деяких типів помилок і атак, таких як атаки “людина посередині”, порівняно з класичними методами кодування. Третя сторона не має змоги перехопити інформацію, що передається за допомогою надщільного кодування, оскільки будь-яка спроба вимірювання кубіта зруйнує його квантовий стан. Це порушення миттєво фіксується сторонами зв'язку, що забезпечує виявлення втручання та гарантує безпеку комунікації.

Квантове надщільне кодування значною мірою залежить від збереження квантової запутаності між двома кубітами. Однак реальні квантові системи піддаються впливу шумів і декогеренції, що може значно знижувати ефективність передачі інформації. Декогеренція відбувається через взаємодію кубітів із навколишнім середовищем. Це призводить до поступового руйнування квантових кореляцій між запутаними кубітами, що унеможливорює коректне декодування переданої інформації. Причинами декогеренції можуть бути: температурні флуктуації в квантовій системі; флуктуації електромагнітних полів (зовнішні магнітні або електричні шуми); розсіювання фотонів у волоконно-оптичних системах тощо.

Якщо заплутаний стан деградує, то на стороні Боба результати вимірювань будуть випадковими, що робить передачу інформації ненадійною. У зв'язку з цим актуальним є розроблення методів мінімізації впливу шумів і декогеренції кубітів. До таких методів можна віднести квантову корекцію помилок, квантове повторне збудження, оптимізацію фізичних систем кубітів, оптимізацію квантового каналу, захист від фазових шумів.

Аналіз та математичне моделювання надщільного кодування відкривають широкі перспективи для розвитку квантових технологій, сприяючи підвищенню ефективності передачі інформації та розширенню можливостей квантових комунікацій. Одним із ключових напрямів є оптимізація квантових комунікаційних протоколів, оскільки математичні моделі дозволяють знаходити ефективні схеми кодування та декодування, що мінімізують вплив шуму, втрат у квантових каналах і покращують загальну стійкість передачі даних.

Метод надщільного кодування забезпечує значний потенціал для розвитку квантових мереж, квантового Інтернету та інших технологій, де важлива висока швидкість передачі даних з високим рівнем безпеки. Також надщільне кодування дозволяє зменшити кількість квантових ресурсів, необхідних для передачі інформації, що робить можливим більш ефективне використання квантових каналів в умовах обмежених ресурсів.

Існуючі квантові комунікаційні протоколи, такі як BB84, E91 та багатосторонні QKD-мережі, ґрунтуються на принципах кодування інформації у квантові стани та запутаності частинок. Надщільне кодування інтегрується в ці протоколи як засіб підвищення ефективності передачі даних, дозволяючи передавати два біти класичної інформації через один кубіт у запутаному стані. Це сприяє збільшенню пропускної здатності каналів, зменшенню апаратних витрат та підвищенню ефективності багатосторонніх квантових мереж.

Отже, дослідження математичних моделей надщільного кодування є не лише актуальним, а й перспективним напрямом, який може суттєво вплинути на розвиток квантових технологій, забезпечуючи надійні, швидкі та безпечні методи обміну інформацією в майбутніх квантових системах.

Подальші дослідження квантового надщільного кодування можуть включати експериментальну перевірку протоколів як на реальних квантових процесорах (наприклад, компаній IBM, Rigetti Computing, IonQ, Google), так і на їхніх симуляторах (IBM Qiskit Aer, Rigetti Forest Simulator, Google Cirq Simulator). Це дасть змогу практично оцінити ефективність процесів кодування та декодування, а також визначити вплив шумів і декогеренції на достовірність переданої інформації.

Висновки

Розглянуто математичну модель квантового надщільного кодування, яка дозволяє передавати через квантовий канал один кубіт із запутаної пари, що відповідає двом класичним бітам інформації, забезпечуючи подвоєння пропускної здатності порівняно з класичними методами передачі даних.

Досліджено вплив операцій кодування на заплутані стани, зокрема застосування операторів Паулі X та Z , які забезпечують однозначне відображення класичної інформації у квантові стани.

Порівняння вимірювання у базисі Белла та зворотного перетворення Белла дозволяє оцінити точність декодування та апаратну складність процесу відновлення класичної інформації. Показано, що застосування зворотного перетворення Белла на стороні отримувача повідомлення забезпечує декодування з меншою апаратною складністю, зберігаючи ефективність квантового надщільного кодування.

Підкреслено значення надщільного кодування в побудові захищених протоколів передачі даних, зокрема в контексті атак на перехоплення, що руйнують квантову заплутаність і дають змогу виявити стороннє втручання в систему.

Проаналізовано вплив шумів та декогеренції на ефективність надщільного кодування. Встановлено, що квантовий шум знижує імовірність коректного відновлення переданих станів.

Отримані результати можуть бути використані для вдосконалення протоколів квантових комунікацій, зокрема квантової криптографії, а також для розробки стійких до шумів квантових інформаційних технологій.

REFERENCES

- Aiache, Y., Al-Kuwari, S., El Anouz, K. & El Allati, A. (2024). Optimal Superdense Coding Capacity in the Non-Markovian Regime. *[quant-ph] arXiv*. Retrieved from <https://arxiv.org/abs/2408.10842>.
- Arsalan, S. M., Al-Kuwari, S. & Abbas, T. (2024). Superdense Coding Using Bragg Diffracted Hyperentangled Atoms. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 42, 1950-1959. <http://dx.doi.org/10.1109/JSAC.2024.3380098>.
- Bennett, C. H., & Wiesner, S. J. (1992). Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states. *Physical Review Letters*, 69(20), 2881-2884. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.69.2881>.
- Bowen, G., & Bose, S. (2001). Teleportation as a depolarizing quantum channel, relative entropy, and classical capacity. *Physical Review Letters*, 87(26), 267901, 1-4. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.267901>.
- Chen, A. C. (2025). Man-in-the-Middle Attacks Targeting Quantum Cryptography. *arXiv:2503.13457 [quant-ph]*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2503.13457>.
- Deb, T., Mandal, J. K., & Sen, D. (2025). Quantum key distribution using super dense coding. *Journal of mechanics of continua and mathematical sciences*, 20(8). <https://doi.org/10.26782/jmcms.2025.08.00007>.
- Jensen, K. S., Valentini, L., Christensen, R. B., Chiani, M., & Popovski, P. (2025). Quantum Two-Way Protocol Beyond Superdense Coding: Joint Transfer of Data and Entanglement. *IEEE Transactions on Quantum Engineering*, 6, 1-8. <http://dx.doi.org/10.1109/TQE.2025.3528238>.
- Kosobutsky, P. S. (2022). Physical foundations of quantum informatics: from quantum mechanics, through quantum computing to quantum cryptography (in Ukrainian). *Computer systems design: theory and practice*, 4 (1), 33-47. DOI: <https://doi.org/10.23939/cds2022.01.033>.
- Krokhmal'skyi, T. E. (2018). *Introduction to Quantum Computing: Textbook* (in Ukrainian). Lviv: Ivan Franko National University of Lviv.
- Li, Y., Zhu, H., Luo, W. Cai, H., Karim, M. F., Luo, X., ...Liu, A. Q. (2025). Realizing ultrahigh capacity quantum superdense coding on quantum photonic chip. *Quantum Information*, 11 (49), 1-6. <https://doi.org/10.1038/s41534-025-01007-y>.
- Lin, Q. (2009). The generation of Entangled Qudits and their Application in Probabilistic Superdense Coding. *Chinese Physics Letters*, 26(4):040301. <https://doi.org/10.1088/0256-307X/26/4/040301>.
- Mattle, K., Weinfurter, H., Kwiat, P. G., & Zeilinger, A. (1996). Dense coding in experimental quantum communication. *Physical Review Letters*, 76(25), 4656-4659. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.76.4656>.
- Ostapov, S. E., & Dobrovolskyi, Y. G. (2021). *Quantum Informatics and Quantum Computing* (in Ukrainian). Chernivtsi: ChNU.
- Patra, R. K., Naik, S. G., Lobo, E. P., Sen, S., Guha, T., Bhattacharya, S. S., ...Banik, M. (2024). Classical analogue of quantum superdense coding and communication advantage of a single quantum system. *Quantum*, 8, 1-45. <http://dx.doi.org/10.22331/q-2024-04-09-1315>.
- Sasaki, M. (2017). Quantum networks: where should we be heading? *Quantum Science and Technology*, 2(2), 020501. <https://doi.org/10.1088/2058-9565/aa6994>.

- Shadman, Z., Kampermann, H., Bruß, D., & Macchiavello, C. (2012). Distributed superdense coding over noisy channels. *Physical Review A*, 85(5), 052306. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.85.052306>.
- Wang, Q., & He, Z. (2024). Amplifying the capacity of quantum super dense coding by non-Hermitian operations under phase decoherence source. *Laser Phys.* 34(6), 065203. <https://doi.org/10.1088/1555-6611/ad3ae9>.
- Yu, H., Sciara, S., Chemnitz, M., Montaut, N., Crockett, B., Fischer, B., ...Morandotti, R. (2025). Quantum key distribution implemented with d -level time-bin entangled photons. *Nature Communication*, 16:171. <https://doi.org/10.1038/s41467-024-55345-0>.
- Zhao, R. (2024). Multiqubit quantum dense coding. *Theoretical and Natural Science*, 50(1), 35-44. <https://doi.org/10.54254/2753-8818/50/20240649>.

MATHEMATICAL ANALYSIS OF QUANTUM SUPERDENSE CODING BASED ON ENTANGLED STATES

Petro Kravets

Lviv Polytechnic National University,
Information Systems and Networks Department, Ukraine, Lviv
E-mail: Petro.O.Kravets@lpnu.ua, ORCID: 0000-0001-8569-423X

© Kravets P, 2025

The aim of the research is the mathematical analysis of quantum superdense coding based on quantum entanglement to increase the efficiency and reliability of information transmission in quantum communication systems. The essence of quantum superdense coding is the ability to transmit two classical bits of information using one qubit, which is part of an entangled pair.

The fundamental principles of the superdense quantum coding method are considered. The relevance of the research in the context of the development of secure quantum communications and optimization of information transmission in quantum networks is substantiated. A review of modern scientific publications devoted to the theoretical principles of superdense coding is conducted, which indicate the development potential and practical prospects of this direction of quantum informatics.

The analysis of mathematical modeling of quantum superdense encoding and decoding is performed using two alternative approaches – projective measurement in the Bell basis and the inverse Bell transform. It is shown that both approaches allow for the complete recovery of classical information transmitted using entangled quantum states. The advantage of the inverse Bell transform is the simplicity of implementation on quantum devices, the flexibility and accuracy of information processing, and the possibility of scaling, which makes it a reasonable choice in many practical applications.

The influence of noise and decoherence on the efficiency of superdense coding has been studied, which is a critical factor in the practical implementation of this method in real quantum systems. A mathematical model of data transmission through a quantum channel under the action of additive white noise has been constructed. An analytical dependence of the probability of correct information recovery on the noise level has been established, which allows us to estimate the limits of reliability of superdense coding in noisy environments.

Based on the research, the prospects for the practical application of superdense coding in quantum communication networks, in particular the quantum Internet, as well as in quantum computing and information security systems, have been outlined. The results obtained contribute to the further development of quantum technologies and can be used to create new protocols for highly efficient quantum data transmission.

Keywords – quantum system, mathematical model, quantum superdense coding, qubit, superposition of states, quantum entanglement, measurement of quantum states, quantum channel, white noise.